Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **1 февраля 2019 г.** (I тур) и **2 февраля 2019 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2018–2019 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018–2019 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 1 февраля 2019, по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (*О. Подлипский*)

Ответ. 8 рыцарей.

Решение. Докажем, что ни один из рыцарей не мог сказать ни одной из фраз «Моё число больше 9» и «Моё число больше 10». В самом деле, если бы это было возможно, то задуманное рыцарем целое число было бы не меньше 10. Но тогда он не мог сказать ни одной из фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10». Значит, рыцарей было не больше восьми.

Покажем, что рыцарей могло быть 8. Пусть первый рыцарь загадал число 2, второй — 3, ..., восьмой — 9, а лжецы загадали числа 5 и 6. Тогда k-ый рыцарь мог сказать фразы «Моё число больше k» и «Моё число меньше $k+2$», а лжецы могли сказать фразы: один — «Моё число больше 9» и «Моё число меньше 1», а другой — «Моё число больше 10» и «Моё число меньше 2».

Замечание. Приведённый выше пример перестаёт быть верным, если лжецы задумывают числа вне отрезка $[1;10]$, так как тогда некоторые их высказывания становятся верными.

Комментарий. Доказано, что рыцарей не больше 9 — 0 баллов.

Доказано, что рыцарей не больше 8 (или, эквивалентно, лжецов не менее двух) — 3 балла.

Приведён пример, показывающий, что рыцарей могло быть 8, с верным указанием, какой человек сказал какие фразы — 4 балла.

Если в приведённом примере не полностью описана ситуация (например, не сказано, какое число загадали лжецы, или явно не указано, кто говорил какую фразу) — из 4 баллов за пример ставится не более 2 баллов.

11.2. Известно, что каждый из трёхчленов x^2+ax+b и $x^2+ax+b+1$ имеет хотя бы по одному корню, и все корни этих трёхчленов целые. Докажите, что трёхчлен $x^2+ax+b+2$ корней не имеет.

(*Н. Агаханов*)

Первое решение. Пусть D_1, D_2, D_3 — соответственно дискриминанты этих трёхчленов. Первые два уравнения имеют только целые корни, поэтому $D_1 = m^2$, $D_2 = n^2$, где числа m и n можно считать целыми неотрицательными. Вычитая из первого равенства второе, получаем, что $4 = m^2 - n^2$, то есть $4 = (m-n)(m+n)$. Числа $m-n$ и $m+n$ — одной чётности, поэтому это равенство может выполняться только если $m-n = m+n = 2$. Но тогда $n = 0$, и, значит, дискриминант третьего уравнения $D_3 = n^2 - 4 = -4$ — отрицательный.

Второе решение. По теореме Виета числа a и b целые.

Пусть x_1 и x_2 — корни трёхчлена $P_1(x) = x^2 + ax + b$, а x_0 — любой из корней трёхчлена $P_2(x) = x^2 + ax + b + 1$. Поскольку $P_2(x)$ имеет хотя бы один корень, корни трёхчлена $P_1(x) = P_2(x) - 1$ различны.

Имеем $P_1(x_0) = P_2(x_0) - 1 = -1$, откуда

$$1 = P_1(x_1) - P_1(x_0) = (x_1^2 + ax_1 + b) - (x_0^2 + ax_0 + b) = \\ = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0 + a).$$

Поскольку оба множителя в правой части целые, они могут быть равны лишь ±1. Аналогично, $x_2 - x_0 = x_2 + x_0 + a = \pm1$. Так как $x_1 \neq x_2$, отсюда следует, что $|x_2 - x_1| = 2$ и $x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$. Так как это рассуждение верно для произвольного корня x_0 трёхчлена $P_2(x)$, его корни совпадают, то есть $P_2(x) = (x-x_0)^2$. А тогда многочлен $P_2(x) + 1 = (x-x_0)^2 + 1$ положителен на всей оси, то есть корней не имеет.

11.3. Назовём *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.

(*И. Богданов*)

Ответ. $55^2 = 3025$ клеток.

Решение. Разобьём доску на 9 квадратов 30×30, 6 прямоугольников 10×30 и один квадрат 10×10 (см. рис. 5). В каждом квадрате 30×30 клетки разбиваются на 15^2 четвёрок так, что расстояние между любыми клетками в одной четвёрке равно 15 (каждая четвёрка состоит из клеток с координатами (a, b), $(a, b + 15)$, $(a + 15, b)$ и $(a + 15, b + 15)$). Тогда в любой четвёрке может быть отмечено не более одной клетки, то есть общее число отмеченных клеток в таком квадрате не превосходит 15^2.

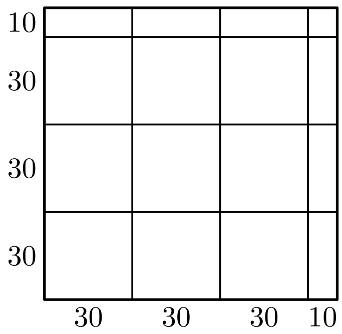

Рис. 5

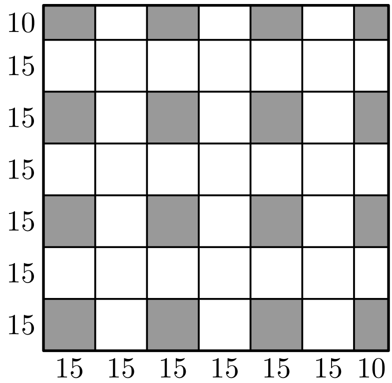

Рис. 6

Аналогично, каждый прямоугольник 10×30 (скажем, с длинной горизонтальной стороной) разбивается на пары клеток, отстоящих друг от друга на 15 (с координатами (a, b) и $(a + 15, b)$) — поэтому в нём не более $15 \cdot 10$ отмеченных клеток. Наконец, в квадрате 10×10 всего 10^2 клеток. Итого, отмеченных клеток не больше, чем $9 \cdot 15^2 + 6 \cdot 15 \cdot 10 + 10^2 = (3 \cdot 15 + 10)^2 = 55^2$.

Пример с таким количеством отмеченных клеток показан на рис. 6.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только приведён правильный пример отмеченных клеток — 1 балл.

Доказано только, что общее количество отмеченных клеток не более 55^2 — 5 баллов.

11.4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, a_3, … такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть $n \geqslant 2018$. Заметим, что $P_n(a) = P_n(-a)$ при всех a. Значит, поскольку $P_n(x)$ имеет ненулевой корень, он имеет и отрицательный корень, откуда $a_{n+1} < 0$.

Далее, поскольку $P_{n+1}(x) = x^2P_n(x) + a_{n+1}$, имеем

$$P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^2P_n(a_{n+1}) + a_{n+1} = 0 + a_{n+1} < 0. \qquad (*)$$

Так как степень многочлена $P_{n+1}(x)$ чётна, а старший коэффициент положителен, при достаточно больших по модулю отрицательных x он принимает положительные значения. Теперь из $(*)$ следует, что у этого многочлена есть корень на интервале $(-\infty, a_{n+1})$. Значит, и $a_{n+2} < a_{n+1}$.

Итак, мы получили, что $a_{n+2} < a_{n+1}$ при всех $n \geqslant 2018$. Это означает, что последовательность $(a_{2019}, a_{2020}, a_{2021}, \ldots)$ — убывающая.

Комментарий. Замечено, что $a_n < 0$, если n достаточно велико — 1 балл.

Замечено соотношение $P_{n+1}(x) = x^2P_n(x) + a_{n+1}$ — 1 балл (может суммироваться с предыдущим баллом).

Во в целом верном решении утверждается, что последовательность обязательно убывает, начиная с 2018-го (а не с 2019-го) члена — снимается 1 балл.

11.5. В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты BE и CF. Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности, и точки A, B, D и F также лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Прямая CF перпендикулярна плоскости ABD, поэтому $CF \perp AD$. Аналогично, $BE \perp AD$. Поэтому прямые CF и BE параллельны плоскости α или лежат в ней. Точки B, C, E и F лежат на сфере ω, описанной около тетраэдра $ABCD$.

Также, поскольку $\angle BEC = 90^\circ = \angle BFC$, точки B, C, E и F лежат на сфере ω', построенной на отрезке BC как на диаметре.

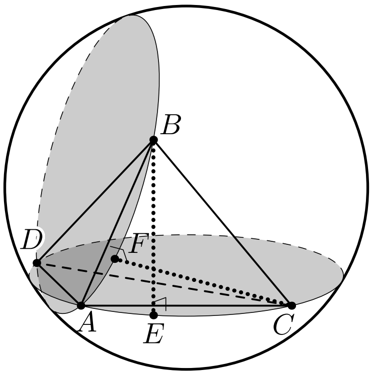

Рис. 7

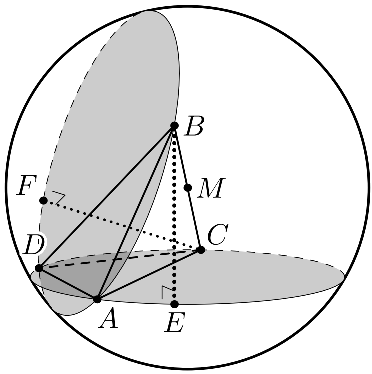

Рис. 8

Если сферы ω и ω' не совпадают, все их общие точки лежат в одной плоскости, обозначим её через β. В плоскости β лежат прямые BE и CF, каждая из которых параллельна плоскости α или лежит в этой плоскости. Также прямые BE и CF не параллельны, поскольку они перпендикулярны пересекающимся плоскостям ACD и ABD. Таким образом, плоскость β параллельна плоскости α или совпадает с ней, а расстояния от точек E и F до α равны расстоянию между плоскостями α и β (см. рис. 7).

Если же сферы ω и ω' совпадают, то их общий центр M является серединой отрезка BC и лежит в плоскости α. Следовательно, расстояния от точек B и C до α равны. Поскольку прямая BE параллельна α, расстояния от B и E до α равны. Аналогично, расстояния от C и F до α тоже равны, а тогда точки E и F равноудалены от α (см. рис. 8).

Комментарий. Разобран только случай, когда сферы не совпадают — 4 балла.

Разобран только случай, когда сферы совпадают — 3 балла.