Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **1 февраля 2019 г.** (I тур) и **2 февраля 2019 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2018–2019 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018–2019 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 1 февраля 2019, по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ — данные числа. Сумма трёх наименьших из них равна $3n+3=3(n+1)$, а сумма трёх самых больших чисел равна $3(n+2)$. Но хотя бы одно из чисел $n+1$ и $n+2$ — чётно, то есть равно произведению чисел 2 и k, где $k>3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трёх различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

Комментарий. Участник собирается выбрать три последовательных числа (из данных четырёх) и замечает, что их сумма обязательно делится на 3 — 3 балла.

11.7. Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$, где $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right)$, убывает. (*А. Храбров*)

Решение. Пусть $t = \sqrt[2^{n+1}]{a}$. Заметим, что $t \neq 1$. Тогда $x_{n+1} = 2^{n+1}(t-1)$ и $x_n = 2^n(t^2-1)$. Следовательно,

$$x_n - x_{n+1} = 2^n(t^2-1) - 2^{n+1}(t-1) = \\ = 2^n(t^2-2t+1) = 2^n(t-1)^2 > 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. При других подходах к решению неравенства могут выглядеть по-разному при $a>1$ (когда члены последовательности положительны) и при $0<a<1$ (когда они отрицательны).

Комментарий. Идея рассмотрения отношения двух соседних членов последовательности — 2 балла.

Если решение проходит лишь в одном из случаев $a>1$ или $0<a<1$ — 4 балла.

11.8. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

(*Р. Женодаров*)

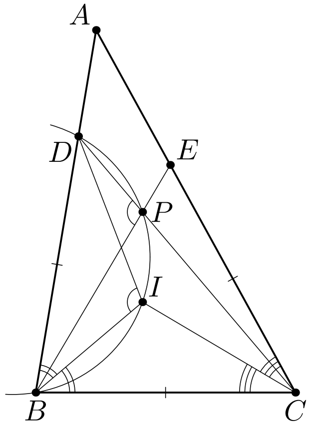

Рис. 6

Решение. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC, точка I является точкой пересечения биссектрис. Докажем, что точки B, D, P, I лежат на одной окружности. Аналогично покажем, что точки C, E, P, I лежат на одной окружности, и задача будет решена.

Достаточно установить равенство $\angle BPD = \angle BID$. Биссектриса BI угла ABC является осью симметрии равнобедренного треугольника BDC, поэтому $\angle BID = \angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB = 180^\circ - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}$ (см. рис. 6). Далее, $\angle BPD = \angle PBC + \angle PCB = \angle EBC + \angle DCB$. Из равнобедренности треугольника BCE получаем $\angle EBC = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ и, аналогично, $\angle DCB = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Отсюда $\angle BPD = 180^\circ - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = \angle BID$, что и требовалось доказать.

Замечание. Точка I является так называемой *точкой Микеля* для четвёрки прямых AB, AC, BE, CD, т. е. через I проходят окружности, описанные около каждого из треугольников, образованных тремя из четырёх перечисленных прямых.

Комментарий. Угол между прямыми BE и CD выражен через углы треугольника ABC — 1 балл.

Угол между прямыми IB и ID (либо между прямыми IB и IE, либо между прямыми IC и IE или аналогичный угол) выражен через углы треугольника ABC — 3 балла.

11.9. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй — нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый — нет. Найдите наибольшее возможное значение m. (В сентябре 30 дней.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. $m = 28$.

Решение. Для каждого натурального n обозначим $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждому ученику сопоставим множество всех дней, когда он ходил в бассейн (это будет подмножество в X_{30}). Итого, мы получили набор из m (согласно условию, непустых) подмножеств в X_{30}. Условие равносильно тому, что во всех подмножествах разные количества элементов, и ни одно из них не содержится в другом; назовём такой набор подмножеств *хорошим*. Таким образом, нам нужно найти максимальное число множеств в хорошем семействе подмножеств в X_{30}.

Докажем сначала, что такой набор не может содержать больше 28 множеств. Это очевидно, если в наборе есть 30-элементное подмножество, так как оно содержит любое другое. Значит, можно считать, что множества в наборе могут состоять лишь из 1, 2, ..., 29 элементов (и их не больше 29). Пусть в хорошем наборе есть 29-элементное множество A и 1-элементное множество B. Так как B не содержится в A, они не пересекаются. Тогда любое другое подмножество в X_{30} либо содержит B, либо содержится в A. Значит, в этом случае хороший набор состоит лишь из двух подмножеств. Наконец, если в наборе нет 1- или 29-элементного подмножества, то в нём уже не более 28 множеств, что и требовалось.

Осталось предъявить пример хорошего набора из 28 пожмножеств в X_{30}. Для этого покажем индукцией по $k \geqslant 2$, что существует хороший набор $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-2}$ подмножеств в X_{2k}, причём A_i содержит $i+1$ элемент. В базовом случае $k = 2$ годятся подмножества $A_1 = \{1, 2\}$ и $A_2 = \{1, 3, 4\}$.

Пусть для некоторого k уже построен требуемый хороший набор $B_1, \ldots, B_{2k-2}$ подмножеств в X_{2k}. Тогда требуемый хороший набор подмножеств в X_{2k+2} можно построить так. Положим $A_{i+1} = B_i \cup \{2k+2\}$ при $i = 1, 2, \ldots, 2k-2$; эти множества содержат 3, 4, ..., $2k$ элементов соответственно. Наконец, положим $A_1 = \{2k+1, 2k+2\}$ и $A_{2k} = \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Нетрудно проверить, что они образуют требуемый хороший набор. Тем самым переход индукции доказан.

Замечание. Рассуждения из второго абзаца решения показывают, что в хорошем наборе подмножеств в X_n не больше, чем $n-2$ множества, если $n \geqslant 4$. С другой стороны, действуя аналогично второй половине решения, можно построить и хороший набор из $2k-1$ подмножества в X_{2k+1} при $k \geqslant 1$; базу индукции доставляет подмножество $A_1 = \{1, 2\}$.

Можно устроить и непосредственный переход индукции, позволяющий по хорошему набору из $n-2$ подмножеств в X_n построить хороший набор из $n-1$ подмножества в X_{n+1} (при $n \geqslant 5$). Для такого перехода полезно следующее соображение: если взять *дополнения* всех множеств хорошего набора, то также получится хороший набор.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Доказано, что число учеников в классе не превосходит 29 — 0 баллов.

Приведён пример с не более, чем 27 учениками — 0 баллов.

Доказано только, что число учеников в классе не превосходит 28 — 2 балла.

Только приведён пример с 28 учениками — 4 балла.

11.10. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

(*А. Храбров*)

Ответ. $\dfrac{1}{8(n-1)}$.

Решение. Если Петя выберет числа $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4(n-1)}, \dfrac{1}{4(n-1)}, \ldots, \dfrac{1}{4(n-1)}$, то, как бы ни расставлял эти числа Вася, число $\dfrac{1}{2}$ будет в одной паре с числом $\dfrac{1}{4(n-1)}$. Значит, одно из произведений будет равно $\dfrac{1}{8(n-1)}$, а остальные будут не больше него. Тогда на доске окажется число $\dfrac{1}{8(n-1)}$.

Покажем, как Вася может для любых чисел получить на доске число, не большее $\dfrac{1}{8(n-1)}$. Перенумеруем числа в порядке убывания: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{2n}$. Поставим в какое-то место на круге число x_1, от него по часовой стрелке через пустые места числа $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Теперь поставим число x_{2n} между x_1 и x_n; дальше по часовой стрелке от x_{2n} расставим на пустых местах по очереди числа $x_{2n-1}, x_{2n-2}, \ldots, x_{n+1}$. Тогда произведениями пар соседних чисел будут: $x_n x_{2n}$,

$$x_1x_{2n},\ x_2x_{2n-1},\ x_3x_{2n-2},\ \ldots,\ x_kx_{2n-k+1},\ \ldots,\ x_nx_{n+1}$$

и

$$x_1x_{2n-1},\ x_2x_{2n-2},\ x_3x_{2n-3},\ \ldots,\ x_kx_{2n-k},\ \ldots,\ x_{n-1}x_{n+1}.$$

Поскольку $x_kx_{2n-k+1} \leqslant x_kx_{2n-k}$, наибольшее произведение может быть лишь во второй строке.

Покажем, что $a = x_kx_{2n-k} \leqslant \dfrac{1}{8(n-1)}$ при $k \leqslant n-1$. Действительно, из неравенств $x_k \leqslant x_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1$ следует, что $kx_k \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, поэтому

$$ka = kx_k \cdot x_{2n-k} \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\, x_{2n-k}.$$

Аналогично из неравенств

$$x_{2n-k} \leqslant x_{2n-k-1} \leqslant x_{2n-k-2} \leqslant \ldots \leqslant x_{k+1}$$

следует, что

$$(2n-2k)x_{2n-k} \leqslant x_{2n-k} + x_{2n-k-1} + \ldots + x_{k+1} \leqslant$$
$$\leqslant x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{2n} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k.$$

Поэтому

$$2k(n-k)a \leqslant$$
$$\leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\,(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k) = x(1-x),$$

где $x = x_1+x_2+\ldots+x_k$. Поскольку по неравенству о средних для двух чисел $x(1-x) \leqslant \left(\dfrac{x + (1-x)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, получаем неравенство $x_kx_{n-2k} = a \leqslant \dfrac{1}{8k(n-k)}$. Осталось показать, что $k(n-k) \geqslant n-1$ при $k \leqslant n-1$. Но последнее неравенство можно переписать в виде $(k-1)(n-k-1) \geqslant 0$, а обе скобки в последней формуле неотрицательны.

Замечание. Оптимальная расстановка для Васи не единственна. Однако можно доказать, что при любом $k = 1, 2, \ldots, n-1$ в любой Васиной расстановке среди произведений пар соседних чисел найдётся число, не меньшее $x_k x_{100-k}$; поэтому оптимальными для Васи окажутся расстановки, в которых наибольшее произведение имеет такой вид.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример Петиных чисел, при котором $A = \dfrac{1}{8(n-1)}$ — 1 балл.

Только доказательство того, что Вася всегда может получить число A, не меньшее $\dfrac{1}{8(n-1)}$ — 5 баллов.

Если в работе *доказано*, что в Васиной расстановке всегда найдётся число, не меньшее $x_k x_{100-k}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$, — ставится 1 балл (этот балл может суммироваться с баллом за пример).