11 класс

Второй день

11.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1.

11.7. Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$, где $x_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right)$, убывает.

11.8. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.9. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй — нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый — нет. Найдите наибольшее возможное значение m. (В сентябре 30 дней.)

11.10. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1.

11.7. Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$, где $x_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right)$, убывает.

11.8. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.9. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй — нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый — нет. Найдите наибольшее возможное значение m. (В сентябре 30 дней.)

11.10. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?