# 8 класс

**Задача 1.** В числовом выражении некоторые цифры заменили буквами (разные цифры — разными буквами, одинаковые цифры — одинаковыми буквами). Получилось следующее:

$$2018A : BCD = AA\,.$$

Какое числовое выражение было записано изначально? (Достаточно привести пример. $2018A$ изначально было пятизначным числом.)

*Ответ:* $20185 : 367 = 55$.

*Замечание.* Других примеров не бывает.

*Критерии*

4 б. Приведён верный пример.

**Задача 2.** В мешке у Деда Мороза находятся меньше ста подарков для Пети, Вася, Бори и Лёши. Дед Мороз отдал половину подарков Пете, пятую часть — Васе, седьмую часть — Боре. Сколько подарков досталось Лёше?

*Ответ:* 11.

*Решение.* Чтобы Дед Мороз мог отдать половину подарков Пете, общее количество подарков в его мешке должно делиться на 2. Также, поскольку он отдал пятую часть Васе, а седьмую часть Боре, общее количество подарков должно делиться на 5 и на 7. Таким образом, количество подарков должно делиться на $\text{НОК}(2,5,7) = 2\cdot 5\cdot 7 = 70$. По условию задачи количество подарков меньше ста, поэтому их может быть только 70. Тогда Пете он отдал $70 : 2 = 35$ подарков, Васе — $70 : 5 = 14$ подарков, а Боре — $70 : 7 = 10$ подарков. Таким образом, Лёше он отдал $70 - 35 - 14 - 10 = 11$ подарков. $\square$

*Критерии*

1 б. Только верный ответ без обоснования.

(Ответ в виде доли, то есть $\frac{11}{100}$, тоже засчитывается.)

3 б. Верное рассуждение, но присутствуют арифметические ошибки.

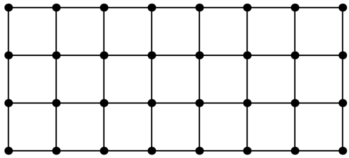
4 б. Приведён верный ответ и обоснование.

К любому из последующих пунктов при наличии верного ответа добавляется 1 балл.

1 б. Доказана делимость общего количества подарков на 2, 5 или 7, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Доказано, что число подарков должно делиться на 70.

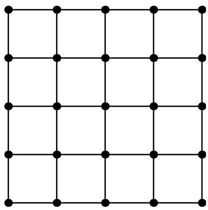
**Задача 3.** Карина достала из коробка несколько спичек и собрала из них сетку $3 \times 7$ из квадратиков со стороной в одну спичку, как на рисунке ниже.

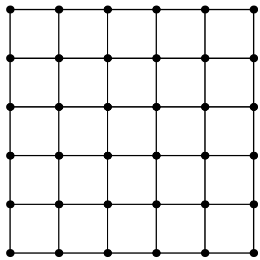


Какое минимальное количество спичек ей нужно ещё достать из коробка, чтобы из всех спичек она смогла собрать сетку в форме квадрата? (Квадратики сетки опять должны иметь сторону в одну спичку. Лишних спичек остаться не должно.)

*Ответ:* 8.

*Решение.* В исходной прямоугольной сетке 52 спички. В квадратной сетке $4 \times 4$ всего 40 спичек, а в сетке $5 \times 5$ — 60.





Следовательно, нам необходимо добавить 8 спичек. □

*Критерии*

1 б. Только верный ответ.

2 б. Указано, что нужно 8 спичек, чтобы получить квадрат $5 \times 5$.

4 б. Приведён верный ответ и полное обоснование.

В качестве обоснования засчитывается указание на количество спичек в квадратах $4 \times 4$ и $5 \times 5$.

**Задача 4.** На школьном спектакле все 25 мест в первом ряду заняты школьниками. Известно, что

- никакие две девочки в этом ряду не сидят рядом;
- рядом с каждым мальчиком сидит ещё хотя бы один мальчик;
- всего в первом ряду сидят 9 девочек.

Могло ли так оказаться, что на центральном месте в ряду сидит мальчик? (Ответ обоснуйте.)

*Ответ:* нет, не могло.

*Решение.* Поскольку никакие две девочки не сидят рядом, каждая девочка сидит между двумя мальчиками. Таким образом, весь ряд представляет собой «группы» подряд сидящих мальчиков, причём между соседними группами мальчиков сидит ровно одна девочка.

По условию рядом с каждым мальчиком сидит ещё один мальчик, поэтому в каждой группе находятся хотя бы 2 мальчика. А так как всего девочек 9, то групп мальчиков хотя бы 8. Получается, что всего детей хотя бы $9 + 2 \cdot 8 = 25$. Но их ровно 25, значит, групп мальчиков ровно 8, и в каждой группе ровно 2 человека.

Тогда рассадка детей восстанавливается однозначно, и на девятом месте сидит девочка. $\square$

*Критерии*

0 б. Только верный ответ без обоснования.

2 б. Указана верная рассадка детей, но нет обоснования, что других рассадок не существует.

4 б. Приведён верный ответ и обоснование.

**Задача 5.** По определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Докажите, что выражение $1008! \cdot 1009! \cdot 2017! \cdot 2018!$ не является квадратом натурального числа.

*Решение.* Заметим, что $1008! \cdot 1009! = (1008!)^2 \cdot 1009$. Аналогично получаем, что $2017! \cdot 2018! = (2017!)^2 \cdot 2018$. Таким образом, $1008! \cdot 1009! \cdot 2017! \cdot 2018! = (1008!)^2 \cdot (2017!)^2 \cdot 1009 \cdot 2018 = (1008! \cdot 2017! \cdot 1009)^2 \cdot 2$.

Последнее выражение не является квадратом, так как имеет вид $2a^2$. Действительно, предположим, что мы имеем равенство $2a^2 = t^2$. Тогда $t$ чётно; пусть $t = 2s$. Подставляя, находим $2a^2 = 4s^2$, то есть наше равенство можно разделить пополам: $a^2 = 2s^2$. Новое равенство аналогично исходному; его точно так же можно разделить пополам, и т. д. Но натуральные числа делить пополам неограниченное число раз нельзя, следовательно, мы пришли к противоречию. $\square$

*Критерии*

4 б. Приведено полное обоснование.

За отсутствие доказательства того факта, что квадрат натурального числа не может быть в два раза больше другого квадрата натурального числа, баллы не снимаются.

**Задача 6.** Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAC = \angle BDA$ и $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$. Найдите длину $AD$, если известно, что $AB = 14$, $CD = 6$.

*Ответ:* 20.

*Решение.* Продлим $AB$ и $CD$ до пересечения в точке $P$. Поскольку $\angle PAD = \angle ADP = 60^\circ$, то треугольник $ADP$ является равносторонним. Далее заметим, что треугольник $APC$ равен треугольнику $DAB$, поскольку $AP = AB, \angle APC = 60^\circ = \angle DAB$ и $\angle PAC = \angle ADB$ (рис. 2). Поэтому $PC = AB = 14$, и $AD = PD = PC + CD = 14 + 6 = 20$. □

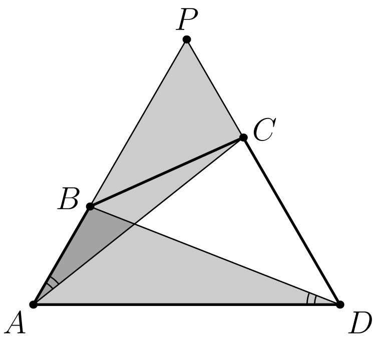



Рис. 2: к решению задачи 6

*Критерии*

0 б. Только верный ответ без обоснования.

1 б. Присутствует дополнительное построение до равностороннего треугольника $APD$, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Найдена пара равных треугольников, приводящих к решению задачи, но решение не доведено до конца.

4 б. Приведён верный ответ и обоснование.