Материалы для проведения регионального этапа

XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2019–2020 учебный год

Второй день

3–4 февраля 2020 г.

Москва, 2019

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, Л. А. Емельянов, Р. Г. Женодаров, П. Ю. Козлов, П. А. Кожевников, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, В. С. Кулишов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, О. С. Смирнов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, Е. О. Холмогоров, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

© Авторы и составители, 2019
© И. И. Богданов, А. И. Голованов, 2019, макет

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **3 февраля 2020 г.** (I тур) и **4 февраля 2020 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2019–2020 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 3 февраля 2020 г., по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.6. На доске написаны функции: $x+1$, x^2+1, x^3+1, x^4+1. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения. (*Н. Агаханов*)

Решение. Например, подходит $(x^4+1)(x+1)-(x^4+1) = x(x^4+1)$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

11.7. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не являлась степенью двойки? (*Д. Храмцов*)

Ответ. Можно.

Первое решение. Покрасим числа $2^s(4k+1)$, где $s,k = 0,1,\ldots$, в первый цвет, а $2^s(4k+3)$, $(s,k=0,1,\ldots)$ — во второй. Покажем, что никакие два числа первого цвета не дают в сумме степень двойки; рассуждения для чисел второго цвета аналогичны.

Пусть наши два числа — это $2^s(4k+1)$ и $2^t(4\ell+1)$, где $s \geqslant t$. Если $s>t$, то сумма $2^s(4k+1)+2^t(4\ell+1) = 2^t(2^{s-t}(4k+1)+4\ell+1)$ содержит нечётный множитель $2^{s-t}(4k+1)+4\ell+1 \geqslant 3$, поэтому она не может быть степенью двойки. Если же $s=t$, то $k\neq\ell$, и сумма $2^s(4k+1)+2^s(4\ell+1) = 2^{s+1}(2(k+\ell)+1)$ тоже содержит нечётный множитель $2(k+\ell)+1 \geqslant 3$ и не может быть степенью двойки.

Второе решение. Назовём раскраску всех натуральных чисел в два цвета *правильной*, если никакие два числа одного цвета не дают в сумме степень двойки. Раскрасим правильно все натуральные числа в два цвета, пользуясь следующим «жадным алгоритмом»: сначала покрасим 1 в первый цвет. Далее, пусть все натуральные числа от 1 до n уже покрашены правильно в два цвета. Рассмотрим число $n+1$. Предположим, найдутся два различных натуральных числа $x<y\leqslant n$

такие, что $x + n + 1 = 2^a$, $y + n + 1 = 2^b$, $a < b$. Тогда $y+n+1 = 2^b \geqslant 2^{a+1} = 2(x+n+1)$, откуда $n+1 \leqslant y-2x < n$, что невозможно. Следовательно, существует не более одного числа, меньшего $n+1$ и дающего в сумме с ним степень двойки. Окрасив $n+1$ в цвет, противоположный цвету этого числа, если оно есть, или в первый цвет, если его нет, получим правильную раскраску всех натуральных чисел от 1 до $n+1$. Продолжая этот процесс, получим правильную раскраску всех натуральных чисел в два цвета.

Замечание. Несложно доказать, что полученная ракраска совпадает с раскраской из первого решения. Но, разумеется, это не единственная раскраска такого рода.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верная раскраска предъявлена, но не обоснована — 4 балла.

11.8. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ — положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m \sin x + n \cos x$ — натуральное число. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть $\sin x + \cos y = a$ и $\sin y + \cos x = b$. Тогда $\cos y = a - \sin x$ и $\sin y = b - \cos x$. Возведём эти равенства в квадрат и сложим их. Тогда в силу основного тригонометрического тождества получим: $1 = a^2 + b^2 - 2a \sin x - 2b \cos x + 1$, то есть $2a \sin x + 2b \cos x = a^2 + b^2$. Пусть N — НОК знаменателей чисел a и b; тогда, умножив полученное равенство на N^2, получим требуемое.

Комментарий. Вместо натуральных чисел найдены положительные рациональные — 5 баллов.

11.9. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим данные сферы через Ω_1, Ω_2 и Ω_3 так, чтобы они касались плоскости α в точках D, E и F соответственно. Пусть C — точка касания сфер Ω_1 и Ω_2. Обозначим через β плоскость, перпендикулярную α и содержащую прямую DE. Тогда центры сфер Ω_1 и Ω_2 и точка C лежат в плоскости β.

Пусть эта плоскость пересекает сферы Ω_1 и Ω_2 по окружностям ω_1 и ω_2 (см. рис. 4). Тогда прямая DE — общая внешняя касательная к этим двум окружностям, а они сами касаются в точке C. Пусть общая касательная к ним в точке C пересекает отрезок DE в точке M. Тогда $MD = MC = ME$.

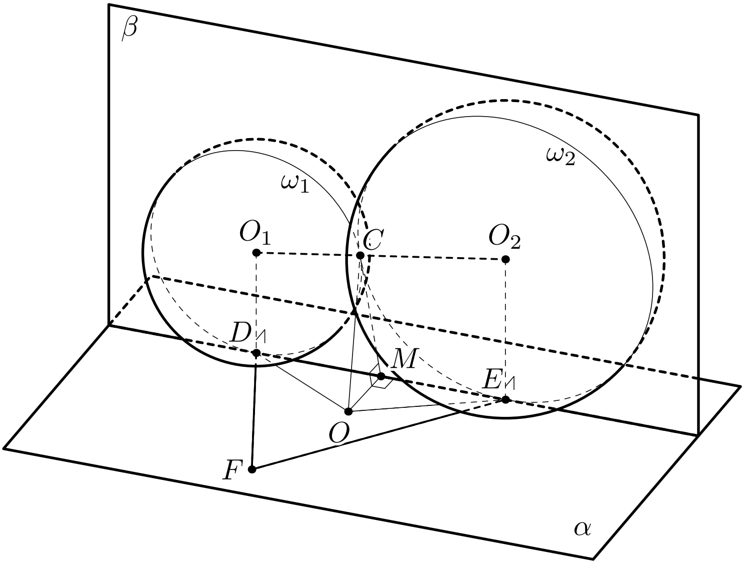

Рис. 4

Обозначим через O центр описанной окружности треугольника DEF, а через R — её радиус. Пусть $O \neq M$. Точка M — середина отрезка DE, поэтому $\angle OME = 90^\circ$. Поскольку $\alpha \perp \beta$, то $\angle OMC = 90^\circ$. Значит, прямоугольные треугольники OMC и OME равны по двум катетам, поэтому $OC = OE = R$. В случае $O = M$ также имеем $OC = R$.

Таким образом, на сфере Ω с центром в точке O и радиусом R лежит точка C. Аналогично, на этой сфере лежат точки A и B. Следовательно, описанная окружность треугольника ABC также лежит на сфере Ω, поэтому её радиус не превосходит R.

Наконец, точки A, B, C лежат в одном полупространстве относительно плоскости α, поэтому точка O не лежит в плоскости ABC. Это означает, что верно строгое неравенство.

Замечание. Конструкция со сферой является обобщением плоского факта. Если две окружности касаются внешним образом в точке X, а общая внешняя касательная касается их в точках Y и Z, то окружность, построенная на отрезке YZ как на диаметре, проходит через точку X. Отметим, что эта конструкция возникает в плоскости β.

Второе решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры сфер Ω_1, Ω_2, Ω_3 соответственно, причём A, B, C — точки касания сфер Ω_2 и Ω_3, Ω_3 и Ω_1, Ω_1 и Ω_2 соответственно. Точки A, B, C лежат на отрезках O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 соответственно, причём $O_1B = O_1C$, $O_2C = O_2A$, $O_3A = O_3B$. Тогда эти точки являются точками касания окружности γ, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$, с его сторонами. Заметим, что γ и является описанной окружностью треугольника ABC (см. рис. 5).

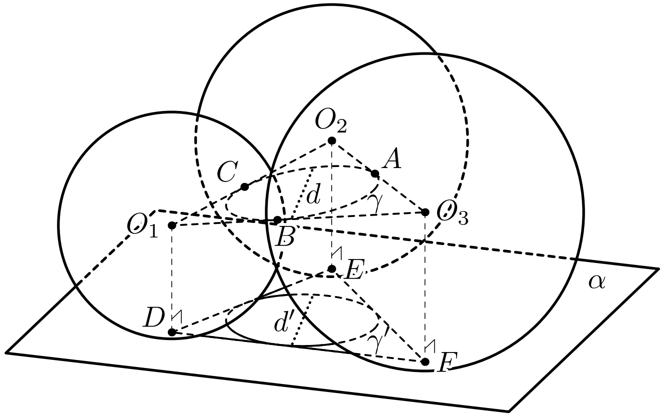

Рис. 5

Заметим, что точки D, E, F — это проекции точек O_1, O_2, O_3 на плоскость α. При этой проекции окружность γ переходит в кривую, лежащую внутри треугольника DEF.

Пусть d — диаметр γ, параллельный плоскости α; тогда при проекции он переходит в отрезок d' той же длины, лежащий в треугольнике DEF (и тем более — внутри его описанной окружности ω). Из этого следует, что диаметр ω больше, чем d, что и требовалось доказать.

Комментарий. Доказано нестрогое неравенство вместо строгого — снимаются 2 балла.

11.10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

(*М. Антипов*)

Ответ. При $n = 8$.

Решение. Мы будем называть многочлен вида $ax^2 + bx + c$ просто *многочленом*, а график такого многочлена — просто *графиком.* Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Через любые три точки* (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ *с разными абсциссами проходит ровно один график.*

Доказательство. Один график, проходящий через эти точки, найдётся всегда — нетрудно проверить, что подходит многочлен

$$b_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + b_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + b_3 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\,.$$

С другой стороны, если через три точки проходят графики двух разных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то разность $f(x) - g(x)$ имеет три корня a_1, a_2, a_3, что невозможно. □

Из леммы следует, что через любые *две* точки с разными абсциссами проходит бесконечно много графиков, и любые два из них пересекаются только по этим двум точкам.

Перейдём к решению. Будем считать, что Петя задумал два графика, за ход Вася называет Пете число t, а Петя отмечает точку с абсциссой t на одном из графиков. Можно считать, что на разных ходах Вася называет разные t (иначе Петя повторит ответ).

Рассмотрим ситуацию после k ходов. Назовём пару графиков *подходящей*, если объединение этих графиков содержит все отмеченные Петей точки.

1) Покажем, что $k \geqslant 8$. Мы будем считать, что Петя изна-

чально не рисует никаких графиков, а просто отмечает некоторые точки с данными абсциссами. Покажем, как ему действовать, чтобы после 7 ходов нашлись две подходящих пары графиков такие, что все 4 графика различны; это и будет означать, что Вася не смог добиться требуемого, ибо Петя мог нарисовать любую из этих пар.

Будем обозначать точку, появляющуюся после i-го хода, через $A_i = (a_i, b_i)$. На первых двух ходах Петя выбирает $b_1 = b_2 = 0$. На следующих 4 ходах Петя отметит точки A_3 и A_4 на графике F_+ многочлена $f_+(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ и точки A_5 и A_6 — на графике F_- многочлена $f_-(x) = -(x - a_1)(x - a_2)$.

Седьмым ходом Петя выбирает точку A_7, не лежащую ни на одном из графиков, проходящем через какие-то три точки из A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6. Тогда существуют графики G_+ и G_-, проходящие через тройки точек A_5, A_6, A_7 и A_3, A_4, A_7; согласно нашему выбору, эти графики различны и отличаются от F_+ и F_-. Значит, пары (F_+, G_+) и (F_-, G_-) — подходящие, и все эти четыре графика различны, то есть Вася не сможет добиться требуемого.

2) Покажем, как Васе добиться требуемого за 8 ходов. На первых 7 ходах он называет 7 произвольных различных чисел. Назовём график *подозрительным*, если он проходит хотя бы через три точки, отмеченных Петей на этих ходах. Назовём число *a плохим*, если два различных подозрительных графика имеют общую точку с абсциссой a. Существует лишь конечное количество подозрительных графиков и, следовательно, лишь конечное количество плохих чисел.

На восьмом ходу Вася называет любое неплохое число a_8. После того, как Петя отметит восьмую точку, возможны два случая.

Случай 1. Существует график G многочлена $f(x)$, содержащий пять из восьми отмеченных точек. Три из этих точек лежат на одном из петиных графиков; по лемме, этот график совпадает с G. Значит, Васе достаточно назвать многочлен $f(x)$.

Случай 2. Такого графика нет. Это значит, что на каждом из петиных графиков лежит ровно по 4 отмеченных точки; поэтому оба этих графика подозрительны. Докажем, что существует единственная пара подозрительных графиков, содержащих в совокупности все 8 отмеченных точек; тогда Васе достаточно назвать любой из соответствующих многочленов.

Пусть (G_1, H_1) и (G_2, H_2) — две таких пары, причём H_1 и H_2 содержат A_8. Согласно выбору числа a_8, это может произойти лишь при $H_1 = H_2$. Но тогда каждый из графиков G_1 и G_2 проходит через 4 отмеченных точки, не лежащих на H_1, и они совпадают согласно лемме. Значит, и наши пары совпадают.

Замечание 1. Если Петя за первые 6 ходов не отметит 4 точек, лежащих на одном графике, то Вася сможет найти один из многочленов седьмым ходом, действуя аналогично описанному выше.

Замечание 2. При описанной стратегии Васи *может* случиться, что существуют две различных пары подозрительных пары, каждая из которых содержит в объединении все 8 отмеченных точек. Например, если точки $A_3, A_4, \ldots, A_8$ лежат на одном графике F, а тройки точек (A_1, A_2, A_3) и (A_1, A_2, A_4) задают графики G_1 и G_2, то пары (F, G_1) и (F, G_2) — подходят.

Комментарий. Лемма из решения выше считается известной; за отсутствие её доказательства баллы не снимаются, а за наличие доказательства — не начисляются.

Только ответ — 0 баллов.

Любое полное решение состоит из двух частей; баллы, полученные за разные части, складываются.

Часть 1: доказательство того, что за 7 вопросов Вася не сумеет добиться требуемого (максимум 4 балла).

Полное доказательство — 4 балла.

Доказано только, что Вася не сможет добиться требуемого за 6 ходов — 1 балл (не суммируется с баллами за другие продвижения в этой части).

Часть 2: доказательство того, что за 8 ходов Вася сумеет добиться требуемого (максимум 3 балла).

Полное доказательство — 3 балла.

Приведён алгоритм, позволяющий Васе добиться требуемого, но обоснование его отсутствует или неверно — 1 балл.

Верного алгоритма нет, но присутствует идея выбора последнего называемого Васей числа a_k так, чтобы никакие два подозрительных графика не пересекались в точке с абсциссой a_k — 1 балл (не суммируется с предыдущим).

Если обоснование верного алгоритма работает в одном из случаев, разобранных выше, но упускает другой случай (или неверно в этом случае) — снимается 1 балл.

Нетрудно доказать, что Вася сумеет добиться требуемого за 9 ходов (поскольку две пары графиков имеют лишь 8 общих точек). Если в Части 2 доказано лишь это — ставится 1 балл. Этот балл не суммируется с другими продвижении в этой части.