Всероссийская олимпиада школьников по математике
2019–2020 уч. г.
Школьный этап

11 класс

Задача 1. Параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекают ось Ox в точке $(2019; 0)$. Докажите, что если точки их вторичного пересечения с осью Ox расположены симметрично относительно начала координат, то и точки их пересечения с осью Oy расположены симметрично относительно начала координат.

Решение. Пусть первая парабола вторично пересекает ось Ox в точке r, а вторая — в точке $-r$. Тогда по теореме Виета $b = 2019r$, $d = -2019r$, т. е. $b = -d$. Но эти параболы пересекают ось Oy в точках $(0; b)$ и $(0; d)$, откуда и следует требуемое. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

1 б. Задача сведена к тому, что нужно доказать, что b и d разных знаков, но других продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. Можно ли так раскрасить все натуральные числа в красный и синий цвета, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, были разных цветов, и любые два числа, отличающиеся в два раза, были разных цветов?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Посмотрим на числа 10, 15 и 20. Из условия следует, что их цвета должны попарно отличаться, что невозможно, поскольку цветов всего два. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. На плоскости даны квадрат и правильный треугольник такие, что площадь каждой из этих двух фигур численно равна периметру другой. Найдите сторону данного квадрата.

Ответ: $2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$.

Решение. Пусть сторона правильного треугольника равна a, а сторона квадрата равна b. Тогда $3a = b^2$ и $4b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Отсюда $b^4 = 9a^2 = 48\sqrt{3}b$. Получается, что $b^3 = 48\sqrt{3}$, откуда $b = 2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Составлены верные уравнения, но в дальнейших вычислениях допущена арифметическая ошибка.

2 б. Только одно из двух уравнений составлено верно.

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. У Малыша и Карлсона есть длинная шоколадка 15×100. Они по очереди выедают из неё квадратные куски любого размера (куски можно выедать только по линиям сетки). Начинает Карлсон. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Карлсон выедает квадрат 14×14 посередине шоколадки, чтобы ось симметрии квадрата и ось симметрии прямоугольника совпадали. Тогда относительно общей оси симметрии остаток шоколадки делится на две одинаковые части. При этом никакой последующий ход не может пересечь ось симметрии. Теперь на каждый ход Малыша Карлсон отвечает симметричным ходом. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка P — середина ребра AA_1, точка Q — середина ребра CD, точка R — середина ребра B_1C_1. Докажите, что $\angle PB_1Q < \angle PRQ$.

Решение. Пусть сторона куба равна $2a$. Тогда по теореме Пифагора

$$PB_1 = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a,$$

$$QB_1 = \sqrt{4a^2 + 4a^2 + a^2} = 3a,$$

$$PR = RQ = PQ = \sqrt{4a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6}a.$$

Тогда треугольник PQR правильный, откуда $\angle PRQ = 60°$. По теореме косинусов

$$\cos\angle PB_1Q = \frac{PB_1^2 + QB_1^2 - PQ^2}{2 \cdot PB_1 \cdot QB_1} = \frac{5a^2 + 9a^2 - 6a^2}{6\sqrt{5}a^2} = \frac{4}{3\sqrt{5}} > \frac{1}{2}.$$

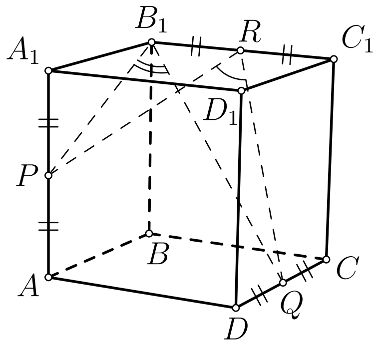

Рис. 1: к решению задачи 5

Последнее неравенство выполнено, поскольку $64 > 45$, откуда $8 > 3\sqrt{5}$.

Тогда $\cos\angle PB_1Q > \cos 60^\circ = \cos\angle PRQ$, откуда $\angle PB_1Q < \angle PRQ$. $\square$

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Доказано, что $\angle PRQ = 60^\circ$.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} + \frac{1+ab}{c} > \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{c(a^2+b^2)}{ab} \geqslant \frac{2abc}{ab} = 2c.$$

По аналогии с этим, $\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant 2a$ и $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geqslant 2b$. Сложив три найденных неравенства, получаем

$$\frac{2bc}{a} + \frac{2ca}{b} + \frac{2ab}{c} \geqslant 2a + 2b + 2c.$$

Также заметим, что

$$\sqrt{a^2+2} < \sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}} = \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} = a + \frac{1}{a}.$$

По аналогии с этим $b + \dfrac{1}{b} > \sqrt{b^2+2}$ и $c + \dfrac{1}{c} > \sqrt{c^2+2}$.

Тогда

$$\frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} + \frac{1+ab}{c} \geqslant a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} >$$
$$> \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}. \qquad \square$$

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Доказано неравенство

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c$$

или эквивалентное ему.

2 б. Доказано неравенство

$$\sqrt{a^2+2} < a + \frac{1}{a}$$

или эквивалентное ему.

1 б. Доказано неравенство

$$\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant 2a$$

или эквивалентное ему.

0 б. Задача не решена или решена неверно.