Всероссийская олимпиада школьников по математике
2019–2020 уч. г.
Школьный этап

11 класс

Задача 1. Параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекают ось Ox в точке $(2019; 0)$. Докажите, что если точки их вторичного пересечения с осью Ox расположены симметрично относительно начала координат, то и точки их пересечения с осью Oy расположены симметрично относительно начала координат.

Задача 2. Можно ли так раскрасить все натуральные числа в красный и синий цвета, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, были разных цветов, и любые два числа, отличающиеся в два раза, были разных цветов?

Задача 3. На плоскости даны квадрат и правильный треугольник такие, что площадь каждой из этих двух фигур численно равна периметру другой. Найдите сторону данного квадрата.

Задача 4. У Малыша и Карлсона есть длинная шоколадка 15×100. Они по очереди выедают из неё квадратные куски любого размера (куски можно выедать только по линиям сетки). Начинает Карлсон. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка P — середина ребра AA_1, точка Q — середина ребра CD, точка R — середина ребра B_1C_1. Докажите, что $\angle PB_1Q < \angle PRQ$.

Задача 6. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} + \frac{1+ab}{c} > \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}.$$

Продолжительность олимпиады — 120 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 4 балла.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2019–2020 уч. г.
Школьный этап

11 класс

Задача 1. Параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекают ось Ox в точке $(2019; 0)$. Докажите, что если точки их вторичного пересечения с осью Ox расположены симметрично относительно начала координат, то и точки их пересечения с осью Oy расположены симметрично относительно начала координат.

Задача 2. Можно ли так раскрасить все натуральные числа в красный и синий цвета, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, были разных цветов, и любые два числа, отличающиеся в два раза, были разных цветов?

Задача 3. На плоскости даны квадрат и правильный треугольник такие, что площадь каждой из этих двух фигур численно равна периметру другой. Найдите сторону данного квадрата.

Задача 4. У Малыша и Карлсона есть длинная шоколадка 15×100. Они по очереди выедают из неё квадратные куски любого размера (куски можно выедать только по линиям сетки). Начинает Карлсон. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка P — середина ребра AA_1, точка Q — середина ребра CD, точка R — середина ребра B_1C_1. Докажите, что $\angle PB_1Q < \angle PRQ$.

Задача 6. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} + \frac{1+ab}{c} > \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}.$$

Продолжительность олимпиады — 120 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 4 балла.