Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

11 класс

11.1. При некоторых натуральных $n > m$ число n оказалось представимо в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа m, а также в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа $m+1$. При каком наибольшем m это могло произойти (хоть при каком-то $n > m$)?

(*А. Кузнецов*)

Ответ. $m = 2021$.

Решение. Пусть $m > 2021$. Поскольку любая степень числа $m + 1$ дает остаток 1 от деления на m, то сумма 2021 таких степеней дает остаток 2021 от деления на m. С другой стороны, степени числа m дают лишь остатки 0 или 1 от деления на m, поэтому сумма 2021 степени числа m может давать остаток 2021 от деления на m только если все слагаемые равны 1. Но тогда $n = 2021 < m$, противоречие. Значит, $m \leqslant 2021$.

Для $m = 2021$ есть пример: $2021m = 1 + 2020(m + 1)$.

Замечание. Можно привести также пример числа $n > m$, у которого в системах счисления с основаниями m и $m + 1$ при $m = 2021$ сумма цифр равна 2021 (тем самым, оно тоже удовлетворяют условию задачи): $n = m^2 + m(m-1) = (m+1)^2 + (m+1)(m-4) + 3$.

11.2. Пусть $P(x)$ — ненулевой многочлен степени n с неотрицательными коэффициентами такой, что функция $y = P(x)$ — нечетная. Может ли оказаться так, что для различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на графике G: $y = P(x)$ выполняются условия: касательная к графику G в точке A_1 проходит через точку A_2, касательная в точке A_2 проходит через точку A_3, ..., касательная в точке A_n — через точку A_1? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Первое решение. Покажем, что при данных условиях на многочлен каждая следующая точка касания лежит по другую сторону от оси Oy, чем предыдущая. Пусть $P(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \ldots + a_1 x$ — данный многочлен, $Q(x) = a_{2m+1}(2m+1)x^{2m} + \ldots + a_1$ — его производная. Пусть $A(z; P(z))$ — это k-я точка касания, а $B(t; P(t))$ — $(k+1)$-я. Тогда касательная в точке A имеет уравнение $y = Q(z)(x - z) + P(z)$. Значит, $P(t) = Q(z)(t-z)+P(z)$, откуда $P(t)-P(z) = (t-z)Q(z)$. Разделив это равенство на $t - z$ и перенеся все слагаемые в правую часть, получим при четной степени $n - 1 = 2m$ выражение: $a_{2m+1}((2m + 1)z^{2m} - t^{2m} - t^{2m-1}z - \ldots - z^{2m})$. Пусть z и t одного знака (считаем, что 0 с любым числом одного знака). Если $|z| > |t|$, то выражение в скобках положительно, если же $|z| < |t|$, то оно отрицательно. Такие же знаки будут иметь выражения при остальных степенях: $2m - 2, 2m - 4, \ldots, 0$. Значит, если z и t — одного знака, то равенство $(t - z)Q(z) - (P(t) - P(z)) = 0$ невозможно. Итак, любые две последовательные точки касания должны находиться по разные стороны от оси Oy. И в силу нечетности n касательная в точке A_n не может пройти через точку A_1.

Второе решение. Заметим, что функция ax^k при $a \geqslant 0$ и нечетном k выпукла на $[0, \infty)$ и вогнута на $(-\infty, 0]$. Многочлен $P(x)$ представляется в виде суммы нескольких функций такого вида, потому что $P(x)$ является нечетной функцией, а его коэффициенты неотрицательные. Тогда функция $P(x)$ также выпукла на $[0, \infty)$ и вогнута на $(-\infty, 0]$. Это означает, что касательная в точке графика P с положительной абсциссой вторично не пересекает график в точках с неотрицательной абсциссой, и наоборот. Кроме того, касательная к графику в нуле не имеет с ним больше общих точек. Это означает, что абсциссы точек $A_1, \ldots, A_n$ отличны от нуля, а их знаки чередуются. Тогда у точек A_n и A_1 абсциссы одного знака, поэтому касательная в точке A_n не проходит через точку A_1.

11.3. В языке три буквы — Ш, У и Я. *Словом* называется последовательность из 100 букв, ровно 40 из которых — гласные (то есть У или Я), а остальные 60 — буква Ш. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы у любых двух выбранных слов хотя бы в одной из ста позиций одновременно стояли гласные, причём различные? (*Ф. Петров*)

Ответ. 2^{40}.

Решение. *Пример.* Рассмотрим все 2^{40} слов, у которых начиная с 41-ой все буквы Ш, а первые 40 — У или Я. Этот набор слов удовлетворяет условию.

Оценка. Каждому из наших m слов сопоставим 2^{60} слов, заменяя каждую букву Ш, на У или Я (всеми возможными способами). Заметим, что полученные $m \cdot 2^{60}$ слов состоят из букв У и Я и попарно различны (для слов, полученных из одного и того же, это ясно из построения, а для слов, полученных из двух разных, следует из условия). Таким образом, $m \cdot 2^{60} \leqslant 2^{100}$ и $m \leqslant 2^{40}$.

Замечание. Оценку можно получить по-другому.

Способ 1. Подкинем монетку 100 раз. Для каждого слова рассмотрим такое событие: при всяком i если на некоторой позиции i стоит буква У, то при i-м подбрасывании выпала решка, а если буква Я, то орёл. Вероятность такого события равна $1/2^{40}$, и они не совместные, поэтому количество слов не больше чем 2^{40}.

Способ 2. Пусть выбрано более 2^{40} слов. Присвоим каждому слову вес 1. Пусть первая буква у x слов У, у y слов — Я и $x \geqslant y$. Удвоим веса всех слов с первой буквой У, и обнулим — с первой буквой Я. Далее посмотрим на вторую букву и т.д. Опишем шаг рассмотрения m-ой буквы. Пусть p — сумма весов слов, у которых m-ая буква У, q — сумма весов слов, у которых m-ая буква Я. Если $p \leqslant q$, удваиваем веса у слов с m-й буквой Я и обнуляем — с m-й буквой У. Иначе — наоборот. В результате таких операций сумма весов не уменьшается. После 100 операций сумма весов всех слов будет больше 2^{40}. В каждом слове только 40 букв У или Я, поэтому вес каждого слова не больше 2^{40}. Значит, найдутся два слова с ненулевыми весами. Тогда для них не найдется позиции, в которой у одного У, а у другого Я или наоборот, противоречие.

11.4. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC пересекает лучи AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2 соответственно. Точка O_a — центр описанной окружности треугольника AC_1C_2, точка O_c — центр описанной окружности треугольника CA_1A_2. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Будем обозначать (XYZ) окружность, описанную около треугольника XYZ. Пусть P_a — центр окружности (BC_1C_2), а P_c — центр окружности (BA_1A_2). Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$ и $\angle ACB = 2\gamma$. Поскольку $BC_2 \parallel AC$, то $\gamma = \angle BCC_2 = \angle ACC_2 = \angle BC_2C$ и $\angle C_2BC_1 = \angle BAC = 2\alpha$. Значит, $BC_2 = BC$. Кроме того, $\angle C_1P_aB = 2\gamma$, $\angle C_1P_aO_a = \angle C_2P_aO_a = \angle C_2BC_1 = 2\alpha$ и $\varphi = \angle P_aBC_2 = |90^\circ - \angle C_2C_1B|$. Здесь мы воспользовались тем, что точка P_a — центр (BC_1C_2) и P_aO_a — серединный перпендикуляр к отрезку C_1C_2.

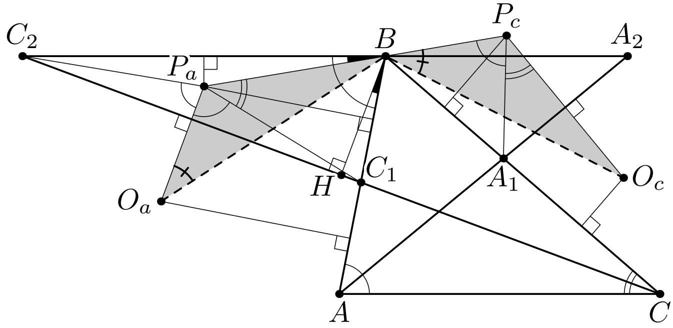

Рис. 4

Проведем в треугольнике BC_1C_2 высоту BH. Тогда $\angle HBC_1 = |90^\circ - \angle BC_1C_2| = \varphi$. Прямая P_aO_a перпендикулярна C_2C_1, а потому параллельна BH. Значит, угол между этой прямой и прямой AB равен φ. Также проекции точек P_a и O_a на AB — середины отрезков BC_1 и AC_1. Следовательно, $P_aO_a = \dfrac{AB}{2\cos\varphi}$. Проекция точки P_a на прямую BC_2 — середина отрезка BC_2, а угол между прямыми BP_a и BC_2 равен φ, откуда $BP_a = \dfrac{BC_2}{2\cos\varphi} = \dfrac{BC}{2\cos\varphi}$.

Из сказанного выше, $\dfrac{P_aO_a}{BP_a} = \dfrac{AB}{BC}$. $\angle BP_aO_a = \angle BP_aC_1 + \angle C_1P_aO_a = 2\alpha + 2\gamma$. Рассуждая аналогично, мы получаем, что $\dfrac{P_cO_c}{BP_c} = \dfrac{BC}{AB}$ и $\angle BP_cO_c = 2\alpha + 2\gamma$. Значит, треугольники P_aBO_a и P_cO_cB подобны. Тогда $\angle P_aBO_a + \angle P_cBO_c = \angle P_aBO_a + \angle P_aO_aB = 180^\circ - \angle BP_aO_a = 180^\circ - 2\alpha - 2\gamma = \angle ABC$. Поскольку $\angle BP_aC_1 = 2\gamma$ и $BP_a = P_aC_1$, то $\angle P_aBC_1 = 90^\circ - \gamma$. Аналогично $\angle P_cBA_1 = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle O_aBO_c = \angle P_aBA + \angle ABC + \angle P_cBC - (\angle P_aBO_a + \angle P_cBO_c) = 90^\circ - \gamma + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha - \gamma = \angle AIC$, что и требовалось.

В равенствах $\angle BP_aC_1 = 2\gamma$ (1) и $\angle C_1P_aO_a = \angle C_2P_aO_a =$

$= \angle C_2BC_1$ (2) мы воспользовались расположением точек P_a и O_a, которое остается обосновать. А именно, $\angle C_1C_2B = \gamma$ — острый, поскольку это половина угла ACB. Значит, точка P_a лежит в той же полуплоскости относительно прямой BC_1, что и C_2, и выполняется (1). Также $\angle O_aC_1A = |90^\circ - \angle AC_2C_1|$. Этот угол острый, и в случае, когда O_a лежит в другой полуплоскости относительно AC_1 нежели P_a, не превосходит $90^\circ - \gamma$, так как $\angle AC_2C_1 < 180^\circ - \angle BC_2C_1 = 180^\circ - \gamma$. Значит, точки B и O_a лежат в разных полуплоскостях относительно прямой C_1P_a, а тогда выполнено (2).

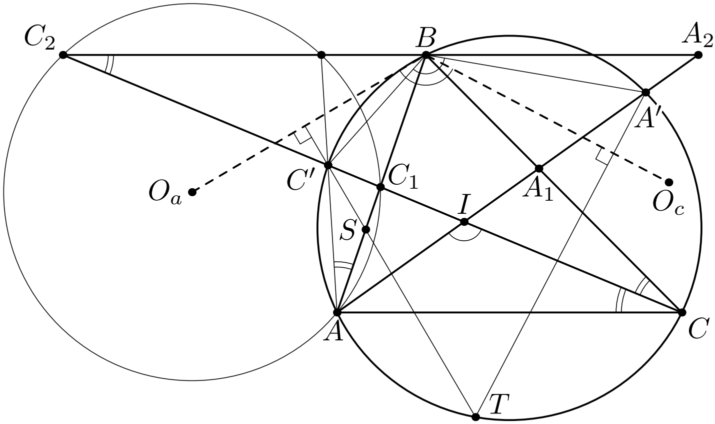

Рис. 5

Замечание. Приведем план другого решения. Обозначим за C' точку пересечения прямой CC_1 с окружностью (ABC). Тогда $\angle BAC' = \angle BCC' = \gamma = \angle BC_2C_1$. Значит, точка пересечения AC' и BC_2 лежит на окружности (AC_1C_2), а тогда точка C' лежит на поляре точке B относительно этой окружности. Теперь отметим на окружности (ABC) точку T так, что четырехугольник $ABCT$ гармонический, обозначим точку пересечения отрезков $C'T$ и AB за S. Центральная проекция в C' переводит четверку точек A, T, C, B с окружности (ABC) в четверку точек A, S, C_1, B на прямой AB. Тогда четверка A, S, C_1, B — гармоническая, откуда следует, что поляра B относительно (AC_1C_2) проходит и через S. Значит, это прямая TC', и она перпендикулярна BO_a. Аналогично, $TA' \perp BO_c$, где A' — точка пересечения AA_1 с (ABC). Тогда $\angle O_aBO_c = 180^\circ - \angle A'TC' = \angle A'BC'$. Остается несложная проверка равенства углов AIC и $A'BC'$.

Задача 1.

a) Только ответ — 0 баллов
b) Верный ответ + верный пример — 2 балла
c) Оценка (доказано, что m не может быть больше 2021) — 4 балла
d) Не разобран случай, когда все степени m нулевые — штраф 1 балл

Задача 2.

а) Баллы не снимаются, если случай x=0 не рассмотрен.
б) Баллы не добавляются за описание свойств графика многочлена.
в) Баллы не добавляются за введение интерполяционного многочлена.
г) За погрешности и пропуски в рассуждениях снималось от 1 до 3 баллов.

Задача 3

а) Ответ с примером -- 1 балл.
б) Сформулирована и доказана Лемма об улучшении набора: пусть S -- множество выбранных слов, и S_Ш, S_У, S_Я -- его подмножества, состоящие из слов, начинающихся с букв Ш, У, Я соответственно. Пусть F_У -- множество слов, получающихся из слов S_У заменой первой буквы на Я. Тогда объединение множеств S_Ш, S_У, F_У удовлетворяет условию -- 1 балл (складывается с а)).

Задача 4

a) Доказано, то BA_2 = AB и BC_2=BC — 0 баллов
b) Переформулировка после инверсии с центром в B — 0 баллов
c) Отмечены середины дуг AB и BC окружности ABC (C’ и A’). Доказано, что точки пересечения прямых AC’ и BC_2 лежит на окружности (AC_1C_2) — 0 баллов
d) Доказано, что точка пересечения прямых AC’ и BC_2 лежит на окружности (AC_1C_2) — 0 баллов
e) Доказано, что поляра в точки B относительно (AC_1C_2) проходит через C’ — 0 баллов
f) Задача сведена к поиску угла между полярами B относительно окружностей (AC_1C_2) и (CA_1A_2) — 0 баллов
g) Есть продвижения e) и f) — 1 балл
h) Доказано только равенство направленных углов — баллы не снимаются
i) Любой недоведенный счёт — 0 баллов