Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

11 класс

11.5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Смогут ли ученики помешать учительнице победить?

(*М. Дидин, А. Кузнецов*)

Ответ. Не смогут.

Решение. Учительница выберет квадрат K размера $100 \times \times 100$ и будет закрашивать отрезки его границы, если это возможно. Пусть перед n-м её ходом все эти отрезки закрашены. Тогда $n \leqslant 401$, поскольку всего на границе 400 отрезков. К этому моменту всего закрашено не более чем $30 \cdot 400$ отрезков, поэтому хотя бы один отрезок внутри квадрата K не закрашен. Каждым следующим ходом учительница будет закрашивать один из отрезков внутри K. Спустя несколько ходов все отрезки внутри K будут закрашены. Тогда перед ходом игрока, который закрасит последний из таких отрезков, найдется искомый прямоугольник 1×2, и учительница победит.

11.6. В тетраэдре $SABC$ длины всех шести рёбер различны. Точка A' в плоскости SBC симметрична точке S относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC. Точка B' в плоскости SAC и точка C' в плоскости SAB определяются аналогично. Докажите, что плоскости $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ и ABC имеют общую точку. (*А. Кузнецов*)

Решение. Будем обозначать (XYZ) окружность, описанную около треугольника XYZ. Обозначим через ω описанную сферу тетраэдра $SABC$. Она пересекает плоскость SAB по окружности (SAB). Точка C' лежит на окружности (SAB), а потому и на сфере ω. Рассуждая аналогично, мы получаем, что точки A' и B' лежат на сфере ω. Тогда точки S, A', B', C' лежат на окружности, по которой сфера ω пересекает плоскость, проходящую через B параллельно плоскости ABC. Не умаляя общности можно считать, что они лежат на окружности именно в таком порядке, то есть четырехугольник $SA'B'C'$ — вписанный.

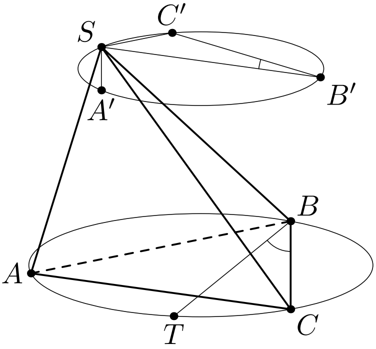

Рис. 5

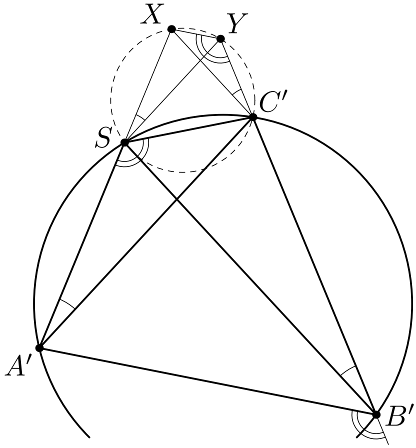

Рис. 6

Отметим на луче $A'S$ точку X, а на луче $B'C'$ — точку Y так, что $A'C' \parallel SY$ и $SB' \parallel C'X$. Тогда $\angle XC'Y = \angle SB'C' = \angle SA'C' = \angle XSY$, поэтому четырехугольник $XSC'Y$ тоже вписанный. Следовательно, $\angle C'YX = \angle A'SC' = 180^\circ - \angle A'B'C'$, поэтому $A'B' \parallel XY$. Заметим, что $SC' \parallel AB$, $SX \parallel BC$ и $XC' \parallel SB' \parallel AC$.

Таким образом, стороны треугольников ABC и $C'SX$ попарно параллельны. Кроме того, они лежат в параллельных плоскостях. Значит, если параллельно перенести треугольник $C'SX$ так, чтобы вершина C' попала в точку A, то полученный треугольник будет отличаться от треугольника ABC гомотетией, а сами треугольники ABC и $C'SX$ — подобны. При упомянутых выше преобразованиях точка Y перейдет в точку T на окружности (ABC), причем $TA \parallel YC'$, $TB \parallel YS$ и $TC \parallel YX$. А тогда $TA \parallel B'C'$, и точка T лежит в плоскости $AB'C'$; аналогично для плоскостей $BA'C'$ и $CA'B'$. А в плоскости ABC она лежит по построению, поэтому эти 4 плоскости имеют общую точку.

Замечание. После того, как мы доказали, что точки A', B', C' лежат на описанной сфере тетраэдра, можно закончить решение инверсией с центром в точке S (с радиусом 1). Обозначим через A^*, B^* и C^* образы точек A, B и C. Образ A'^* точки A' — точка пересечения касательной к окружности SB^*C^* в точке S с прямой B^*C^*, аналогичное верно для точек B'^* и C'^*. Несложно проверить, что эти три точки лежат на одной прямой, обозначим ее ℓ. Тогда окружности $(A'^*B'^*C^*)$, $(A'^*B^*C'^*)$, $(A^*B'^*C'^*)$ и $(A^*B^*C^*)$ проходят через одну точку — точку Микеля M четырехсторонника, образованного прямыми A^*B^*, B^*C^*, C^*A^* и ℓ. А это означает, что плоскости A_1B_1C, AB_1C_1, A_1BC_1 и ABC проходят через прообраз M.

11.7. Найдите все перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ чисел $1, 2, \ldots, 2021$ такие, что при любых натуральных m, n, удовлетворяющих условию $|m-n| > 20^{21}$, выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{2021} \text{НОД}(m+i, n+a_i) < 2|m-n|.$$

(*Перестановка* $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ — это последовательность, в которой каждое из чисел $1, 2, \ldots, 2021$ встречается ровно по одному разу.) (*П. Козлов*)

Ответ. Тождественная перестановка, то есть $a_i = i$.

Решение. Рассмотрим перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$, для которой выполняется условие задачи. Обозначим $d_i = i - a_i$. Очевидно, что сумма всех чисел d_i равна нулю. Пусть не все d_i равны 0, в таком случае существуют индексы j, k такие, что $d_j < 0, d_k > 0$. Возьмём $r = 20^{21}(d_k - d_j) - d_j + 1$, тогда $\text{НОД}(r + d_j, r + d_k) = \text{НОД}(r + d_j, d_k - d_j) = 1$. По китайской теореме об остатках существует целое $m > r$ такое, что $m + j$ кратно $r + d_j$ и $m + k$ кратно $r + d_k$. Тогда для пары натуральных чисел $(m, n) = (m, m - r)$, во-первых, выполняется $|m - n| = r > 20^{21}$, а во-вторых, верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{2021} \text{НОД}(m+i, n+a_i) \geqslant$$

$$\geqslant \text{НОД}(m+j, n+a_j) + \text{НОД}(m+k, n+a_k) + 2019 =$$
$$= \text{НОД}(m+j, -r-d_j) + \text{НОД}(m+k, -r-d_k) + 2019 =$$
$$= (r+d_j) + (r+d_k) + 2019 = 2r + d_j + d_k + 2019 \geqslant$$

$$\geqslant 2r - 2020 + 1 + 2019 = 2r = 2|m-n|,$$

что противоречит выбору перестановки. Следовательно, все d_i равны 0, и перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ является тождественной, то есть $a_i = i$.

Лемма. *Пусть натуральные A, $\ell \geqslant 2$ удовлетворяют неравенству $A > \ell^3$. Обозначим за $S(n)$ сумму $\sum_{i=1}^{l}$ НОД$(A, n+i)$. Тогда $S(n) < 2A$ для любого натурального n.*

Доказательство. Предположим противное и обозначим за M максимум из чисел вида НОД$(A, n+i), i \in [1, \ell]$, причём $M =$ НОД$(A, n+i_0)$. Тогда $2A/\ell \leqslant M \leqslant A$, а при $i \neq i_0$ верна следующая цепочка неравенств:

$$\text{НОД}(A, n+i) \cdot \text{НОД}(A, n+i_0) \leqslant A \cdot \text{НОД}(n+i, n+i_0) \leqslant$$
$$\leqslant A|i - i_0| < A\ell,$$

откуда следует, что $S(n) < M + (\ell - 1) \cdot \dfrac{A\ell}{M}$. На отрезке $[2A/\ell; A]$ функция $f(x) = x + \dfrac{A(\ell-1)\ell}{x}$ достигает максимума в одном из его концов, поэтому

$$S(n) < \max\{f(2A/\ell), f(A)\} =$$
$$= \max\{2A/\ell + \ell^2(\ell-1)/2, A + \ell(\ell-1)\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{A + \ell^2(\ell-1)/2, A + \ell(\ell-1)\} < 2A,$$

так как $\ell \geqslant 2$ и $A > \ell^3$, что противоречит нашему предположению. $\square$

Тот факт, что тождественная перестановка подходит под условие задачи, следует из леммы с $A = |m-n|$, $\ell = 2021$ и из равенства НОД$(m+i, n+i) =$ НОД$(m-n, n+i)$.

11.8. У каждой из 100 девочек есть по 100 шариков; среди этих 10000 шариков есть по 100 шариков 100 различных цветов. Две девочки могут обменяться, передав друг другу по шарику. Они хотят добиться того, чтобы у каждой девочки было по 100 разноцветных шариков. Докажите, что они могут добиться этого такой серией обменов, чтобы любой шарик участвовал не более чем в одном обмене. (*И. Богданов, Ф. Петров*)

Решение. Лемма. *Пусть k — натуральное число, и у каждой из ста девочек имеется k шариков, причём всего у них есть по k шариков каждого из 100 цветов. Тогда девочки мо-*

гут выбрать каждая по одному из своих шариков так, чтобы все 100 шариков были разных цветов.

Доказательство. Будем говорить, что девочка дружит с цветом, если у неё есть шарик этого цвета. Заметим, что любые $m = 1, 2, \ldots, 100$ девочек дружат в совокупности хотя бы с m цветами (иными словами, имеют шарики хотя бы m различных цветов): иначе по принципу Дирихле среди их km шариков какого-то цвета было бы более k шариков. Тогда по лемме Холла можно сопоставить каждой девочке дружественный ей цвет так, чтобы все сопоставленные цвета были различны — а это нам и нужно. $\square$

Пусть теперь девочки придут на квадратное поле 100×100 (для игры в большие классики), и каждая девочка выделит себе свой столбец, чтобы разложить в нём свои шарики — по одному на поле. Сначала они воспользуются леммой при $k = 100$, найдут у себя по шарику так чтобы те были разного цвета, и выложат их в первой строке. Затем, применяя лемму при $k = 99$ (к ещё не выложенным шарикам), они найдут по шарику так чтобы те были разного цвета и выложат их во второй строке. и так далее. В результате в каждой строке оказываются шарики разных цветов, а в каждом столбце выложены шарики соответствующей ему девочки. Осталось заметить, что симметрия относительно диагонали этого поля приводит к тому что в каждом столбце лежат шарики разного цвета, и эта симметрия соответствует 4950 разрешённым обменам.

Задача 5

а) Сформулирована и доказана лемма, что если в какой-то момент появился целиком закрашенный замкнутый контур, внутри которого еще не все ребра покрашены — то Учительница выиграла (внимание! никакие частные случаи этого утверждения, например: для полосок, для уголков и т.д. не подходят под этот критерий) -- 3 балла.

б) Доказано, что Учительница может добиться того, что будет полностью закрашен замкнутый контур, внутри которого еще не все ребра покрашены (без указания, что делать дальше) -- 2 балла (не суммируется с (а)).

Задача 6

а) Если в решении используются обычные углы и не разобраны случаи расположения, а введение направленных углов решает эту проблему — баллы не снимаются.

б) Если используется теорема Чевы в синусной форме и нет утверждения о правильном расположении прямых относительно вершин треугольника, снимается 1 балл.

в) За доказательство *вписанности* четырёхугольника SA'B'C' (или его проекции на плоскость ABC) — 1 балл.

г) За доказательство того, что прямые пересечения плоскостей AB'C' и ABC параллельны прямым B'C' — 1 балл.

д) За доказательство того, что точки S, A', B', C' лежат в одной плокости, параллельной плоскости ABC — 0 баллов.

е) За сведение задачи к следующему факту: если даны два треугольника ABC и A'B'C' и прямые, параллельные прямым A'B', B'C', C'A', проходящие через точки C, A, B, соответственно, пересекаются в одной точке, то и прямые, параллельные прямым AB, BC, CA, проходящие через точки C', A', B', соответственно, тоже пересекаются в одной точке, — 2 балла.

ж) Любой недоведённый счёт — 0 баллов.

Задача 7.

a) Доказано, что никакая перестановка, кроме тождественной, не подходит — 3 балла
b) Доказано, что тождественная перестановка подходит — 3 балла
c) В части, доказывающей что подходит только тождественная перестановка, получено неравенство 2|m-n|-const для некоторой положительной константы — 2 балла (не суммируется с (a))
d) При применении КТО не объяснено, что модули взаимно просты - штраф 1 балл

Задача 8.

а) Нет решения — 0 баллов.

б) Организован процесс последовательного обмена шариками (без доказательства, что он дойдёт до конца) — 0 баллов.

в) Организован обмен при помощи циклов — 0 баллов.

г) Рассмотрен любой частный случай, в котором шарики располагаются в таблице 100 на 100 **и** обмениваются шарики, симметричные относительно диагонали — 1 балл.

д) Лемма из официального решения сформулирована, но не доказана — 1 балл.

е) Лемма из официального решения сформулирована и доказана — 2 балла.