Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На окружности отмечено 1000 точек, каждая окрашена в один из k цветов. Оказалось, что среди любых пяти попарно пересекающихся отрезков, концами которых являются 10 различных отмеченных точек, найдутся хотя бы три отрезка, у каждого из которых концы имеют разные цвета. При каком наименьшем k это возможно? (*С. Берлов*)

Ответ. При $k = 143$.

Решение. Предположим, что на окружности есть 8 точек одного цвета (скажем, красного). Добавим к ним ещё две отмеченных точки, получив десятиугольник $A_1A_2\ldots A_5B_1B_2\ldots B_5$. Тогда отрезки A_1B_1, A_2B_2, …, A_5B_5 попарно пересекаются, и среди них есть три отрезка, у которых все концы красные. Это противоречит условию. Таким образом, точек каждого цвета не больше семи, поэтому $k \geqslant \frac{1000}{7}$, то есть $k \geqslant 143$.

При $k = 143$ отметим дополнительную, 1001-ю, точку и разделим все отмеченные точки на 143 группы по 7 подряд идущих точек. Каждую группу окрасим своим цветом. Пусть A_1B_1, …, A_5B_5 — пять попарно пересекающихся отрезков с концами в отмеченных точках. Можно считать, что точки A_1, A_2, …, A_5, B_1, B_2, …, B_5 расположены на окружности именно в этом порядке. Предположим, что отрезок A_1B_1 имеет одноцветные концы (скажем, красные). Тогда либо все точки A_1, A_2, …, A_5, либо все точки B_1, B_2, …, B_5 красные. В первом случае максимум две из точек B_1, B_2, …, B_5 красные. Но тогда три отрезка, не содержащие этих точек, будут иметь разноцветные концы. Второй случай аналогичен.

9.2. Пусть n — натуральное число. Целое число $a > 2$ назовём *n-разложимым*, если $a^n - 2^n$ делится на каждое число вида $a^d + 2^d$, где d — натуральный делитель n, отличный от n. Найдите все составные натуральные n, для которых существует n-разложимое число. (*С. Кудря*)

Ответ. $n = 2^m$ при $m > 1$.

Решение. Для $n = 2^m$ любое натуральное $a > 2$ является n-разложимым в силу равенства

$$a^{2^m} - 2^{2^m} = (a-2)(a^1+2^1)(a^2+2^2)\ldots\left(a^{2^{m-1}} + 2^{2^{m-1}}\right).$$

Действительно, среди сомножителей в правой части присутствуют все числа вида $a^d + 2^d$, где d — делитель n, меньший n.

Пусть теперь n не является степенью двойки, тогда у него есть нечётный простой делитель p и $n = pk$, где $k > 1$ — натуральное число. Предположим, что существует n-разложимое число a. Тогда $a^{pk} - 2^{pk}$ делится на $a^k + 2^k$. Кроме того, $a^{pk} + 2^{pk}$ делится на $a^k + 2^k$, поскольку p нечётно. Следовательно, $2 \cdot 2^{pk} = (a^{pk} + 2^{pk}) - (a^{pk} - 2^{pk})$ также делится на $a^k + 2^k$. Таким образом, число $a^k + 2^k > 1$ является делителем степени двойки и, значит, само является степенью двойки.

В частности, отсюда следует, что a чётно, то есть $a = 2b$ для некоторого натурального $b > 1$. Тогда $b^k + 1 = \dfrac{a^k + 2^k}{2^k} > 1$ также является степенью двойки и, значит, b нечётно. Если k чётно, то число $b^k + 1$ дает остаток 2 при делении на 4, и при этом это число больше 2, что невозможно. Стало быть, k нечётно. Но тогда число

$$b^k + 1 = (b+1)(b^{k-1} - b^{k-2} + b^{k-3} - \ldots - b + 1)$$

не может быть степенью двойки, поскольку вторая скобка нечётна и больше единицы. Значит, n-разложимого числа не существует.

9.3. На прямой отмечено $n + 1$ различных отрезков; одна из точек прямой принадлежит всем этим отрезкам. Докажите, что среди отмеченных отрезков можно выбрать различные отрезки I и J, пересекающиеся по отрезку длины, не меньшей $\dfrac{n-1}{n}d$, где d — длина отрезка I. (*И. Богданов, В. Уфнаровский*)

Первое решение. Введём координаты на нашей прямой. Пусть данные отрезки — это $I_0 = [a_0; b_0]$, $I_1 = [a_1; b_1]$, $\ldots$, $I_n = [a_n; b_n]$; нумерацию отрезков выберем так, что $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Если $b_k \geqslant b_{k+1}$ при некотором k, то отрезок I_k содержит I_{k+1}, и потому отрезки $I = I_{k+1}$ и $J = I_k$ — искомые. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что $b_0 < b_1 < \ldots < b_n$.

Рассмотрим $2n$ отрезков $[a_0; a_1]$, $[a_1; a_2]$, $\ldots$, $[a_{n-1}; a_n]$, $[b_0; b_1]$, $[b_1; b_2]$, $\ldots$, $[b_{n-1}; b_n]$ (некоторые из них могут иметь нулевую длину). Рассмотрим кратчайший из них — пусть для определённости это $[a_k; a_{k+1}]$, а его длина равна ℓ. Тогда

$$b_k - b_0 = (b_k - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_{k-2}) + \ldots + (b_1 - b_0) \geqslant k\ell$$

и, аналогично,

$$a_n - a_k = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_{k+1} - a_k) \geqslant (n-k)\ell.$$

Поскольку I_n и I_0 имеют общую точку, имеем $b_0 \geqslant a_n$, откуда

$$b_k - a_k \geqslant (b_k - b_0) + (a_n - a_k) \geqslant k\ell + (n-k)\ell = n\ell.$$

Итак, длина d отрезка I_k не меньше, чем $n\ell$. Иначе говоря, часть $[a_k; a_{k+1}]$ этого отрезка, лежащая вне I_{k+1}, имеет длину, не превосходящую d/n. Поэтому отрезки $I = I_k$ и $J = I_{k+1}$ — искомые.

Второе решение. Пусть данные отрезки — это $I_0 = A_0B_0$, $I_1 = A_1B_1$, $\ldots$, $I_n = A_nB_n$. Как и в предыдущем решении, мы сводим задачу к случаю, когда точки A_0, A_1, $\ldots$, A_n пронумерованы слева направо, и так же пронумерованы точки B_0, B_1, $\ldots$, B_n.

При всех $k = 0, 1, \ldots, n$, отметим на отрезке I_k точку C_k так, что $A_kC_k : C_kB_k = (n-k) : k$. Таким образом, точка $C_0 = B_0$ находится не левее точки $C_n = A_n$. Значит, найдётся индекс k, при котором точка C_k находится не левее точки C_{k+1}. Выберем такой индекс k и положим $d = \min(A_kB_k, A_{k+1}B_{k+1})$. Заметим, что точки A_k, A_{k+1}, C_{k+1}, C_k, B_k, B_{k+1} лежат на прямой именно в таком порядке слева направо. Тогда

$$A_{k+1}B_k \geqslant A_{k+1}C_{k+1} + C_kB_k = \frac{n-k-1}{n}\,A_{k+1}B_{k+1} + \frac{k}{n}\,A_kB_k \geqslant \\ \geqslant \frac{n-k-1}{n}\,d + \frac{k}{n}\,d = \frac{n-1}{n}\,d.$$

Это и значит, что длина общей части отрезков I_k и I_{k+1} не меньше, чем $\frac{n-1}{n}\,d$, где d — длина одного из них.

Замечание. Нетрудно привести пример $n+1$ попарно пересекающихся отрезков одинаковой длины d, любые два из которых пересекаются по отрезку длины, не превосходящей $\frac{n-1}{n}\,d$.

9.4. На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E. Оказалось, что прямая, проходящая через E и параллельная AB, касается окружности, описанной около треугольника ADC. Докажите, что одна из касательных, проведённых из точки E к описанной окружности треугольника BCD, отсекает от угла ABE треугольник, подобный треугольнику ABC.

(А. Кузнецов, С. Берлов)

Решение. Пусть прямая, проходящая через E и параллельная AB, пересекает прямую AC в точке X (см. рис. 1). Поскольку треугольники CEX и CBA подобны, имеем $\frac{EC}{CB} = \frac{XC}{CA}$.

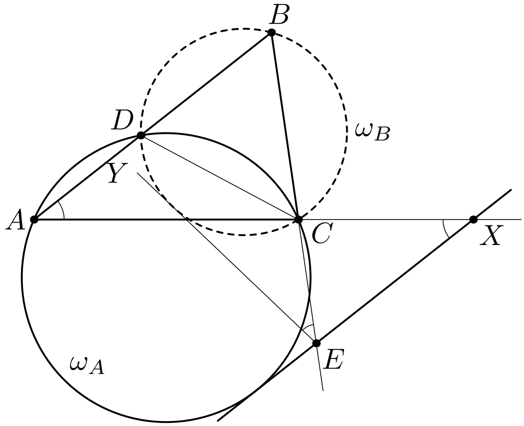

Рис. 1

Заметим, что дуга CB описанной окружности ω_B треугольника CDB равна $2\angle CDB$; тому же равна дуга CDA описанной окружности ω_A треугольника ADC. Из равенства выше получаем, что конфигурация из трёх точек E, C, B и окружности ω_B подобна конфигурации из точек X, C, A и окружности ω_A.

Рассмотрим в первой конфигурации луч EY, соответственный лучу XE во второй. Поскольку XE касается ω_A, луч EY касается ω_B. Кроме того, $\angle YEB = \angle EXA = \angle BAC$. Поэтому луч EY отсекает от угла ABE треугольник, два угла которого равны $\angle BAC$ и $\angle ABC$, то есть этот треугольник подобен треугольнику ABC.

Критерии оценивания работ 9 класса

1 задача

1. Неверная конструкция, приводящая к неверному ответу — **0 баллов**.
2. Верный пример расположения 1000 точек при $k = 143$ без обоснования или с неверным обоснованием корректности — **1 балл**.
3. Верный пример расположения 1000 точек при $k = 143$ с верным обоснованием — **3 балла**.
4. Оценка (доказательство, что при $k \leq 142$ невозможно отметить 1000 точек так, чтобы условие задачи выполнялось) — **3 балла**.
5. Оценка и верный пример расположения 1000 точек при $k = 143$ без обоснования или с неверным обоснованием корректности — **4 балла**.
6. Оценка и верный пример расположения 1000 точек при $k = 143$, в обосновании корректности которого есть незначительные недочёты — **6 баллов**.

   Замечание. В исключительных случаях возможна промежуточная оценка между 4 и 6 баллами, описанными в предыдущих двух пунктах.

2 задача

(Пример) Доказано, что для любого $n = 2^k$ существует n-разложимое число — **1 балл**

Замечание. Этот балл может прибавляться к остальным; остальные друг с другом не складываются, за исключением оговоренных случаев.

(1) Проверено, что для четного n, отличного от степени 2, не существует n-разложимого числа — **2 балла**.

(2) Проверено, что для нечетного n не существует n-разложимого числа — **3 балла**.

(2′) Если для нечётного n было получено равенство $(2^r - 1)^d + 1 = 2^s$ без дальнейших продвижений, этот случай оценивается в **2 балла**.

(3) Доказано, что 2^{n+1} делится на $a^d + 2^d$, или что $a^d + 2^d = 2^s$ для некоторых делителей $d > 1$ числа n — **1 балл**.

(4) Пункты (1) и (2) вместе — **6 баллов**; пункты (1) и (2′) вместе — **4 балла**.

За присутствие в ответе простых n баллы **не снижаются**.

Утверждение, что уравнение $a^d + 2^d = 2^s$ не имеет решений, кроме тривиальных, и эквивалентные ему, приведенные без доказательств, **не оцениваются**!

3 задача

(1) Сформулировано в явном виде и доказано, что левые концы отрезков идут на прямой в то же порядке, что и правые .... **1 балл**

(2) Условие на требуемые отрезки I и J переформулировано как соотношение вида $\ell(I \setminus J) \leqslant \ell(I)/n$ и т.п., **при этом** в работе отсутствуют неверные переформулировки такого вида .... **1 балл**

(3) Во в целом верном решении отсутствует доказательство одинаковой упорядоченности концов отрезков .... **снимается 1 балл**

(4) В решении выбирается кратчайший отрезок, и решение не работает, если он крайний; однако, если выбирать кратчайший отрезок из некрайних, все рассуждения проходят .... **снимается 1 балл**

(5) В решении пишутся оценки на некоторые суммы без выводов или с неверными выводами .... **баллы не начислятся**

4 задача

1. Любой недоведённый счёт (координаты, комплексные числа, тригонометрия, ...) — **0 баллов**.

2. Переформулировка условия задачи в терминах антипараллельности некоторых прямых или вписанности некоторых четырёхугольников без дальнейших продвижений — **0 баллов**.

3. Задача сведена к (недоказанной) коллинеарности следующих трёх точек: D, точка касания ω_b с касательной из E и точка касания ω_c с касательной из E — **2 балла**.

4. Приведено верное решение для тупоугольного треугольника, адаптация которого для исходного условия требует существенного корректирования — **5 баллов**.

5. Логические или технические ошибки, требующие исправлений или доработок, при верном в целом решении — **6 баллов**.