Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Числа $b > 0$ и a таковы, что квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных корня, ровно один из которых лежит на отрезке $[-1; 1]$. Докажите, что ровно один из этих корней лежит в интервале $(-b; b)$. *(А. Храбров)*

Первое решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$. Если ровно один корень лежит на отрезке $[-1, 1]$, то трёхчлен меняет знак на этом отрезке, то есть

$$(1 + a + b)(1 - a + b) = f(1)f(-1) \leqslant 0.$$

Тогда

$0 \geqslant b^2(1+a+b)(1-a+b) = (b^2+ab+b)(b^2-ab+b) = f(b)f(-b)$. Следовательно, на отрезке $[-b, b]$ есть корень, причем, если знак полученного неравенства строгий, то корень ровно один (и он не в конце отрезка). В случае равенства один из корней равен $\pm b$, а второй ± 1, причем $b > 1$ (иначе на отрезке $[-1, 1]$ будет два корня). Тогда на интервале $(-b, b)$ лежит ровно один корень.

Второе решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трёхчлена, причём $|x_1| \leqslant 1$ и $|x_2| > 1$. По теореме Виета имеем $|x_1| \cdot |x_2| = b$. Тогда $|x_2| = b/|x_1| \geqslant b/1 = b$ и $|x_1| = b/|x_2| < b$. Итак, из двух корней только x_1 лежит в интервале $(-b; b)$.

9.6. Внутри неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle ABC = 60^\circ$, отмечена точка T так, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120^\circ$. Медианы треугольника пересекаются в точке M. Прямая TM пересекает вторично окружность, описанную около треугольника ATC, в точке K. Найдите TM/MK. *(А. Кузнецов)*

Ответ. $1/2$.

Первое решение. Пусть O — центр описанной окружности Ω треугольника ABC. Поскольку $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$, точка O лежит на описанной окружности γ треугольника ATC. Пусть прямая BT вторично пересекает окружность γ в точке X, а окружность Ω — в точке P. Поскольку $\angle ATX = \angle CTX = 60^\circ$, точка X лежит на серединном перпендикуляре к AC, поэтому

OX — диаметр γ. Значит, $BT \perp OT$, то есть T — середина хорды BP окружности Ω.

Наконец, пусть точка K' симметрична точке P относительно точки S — середины стороны AC. Поскольку $\angle AK'C = \angle APC = 120^\circ$, точка K' лежит на γ. Точка M лежит на медиане BS треугольника BPK' из вершины B и делит её в отношении $2:1$, считая от точки B; поэтому M — точка пересечения медиан треугольника BPK'. Значит, M лежит и на медиане $K'T$, поэтому $K' = K$ и $KM : MT = 2 : 1$.

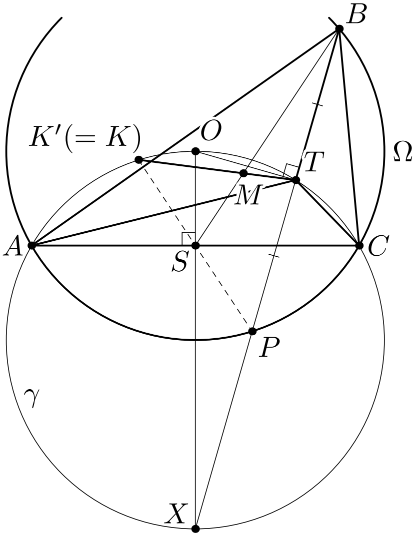

Рис. 1

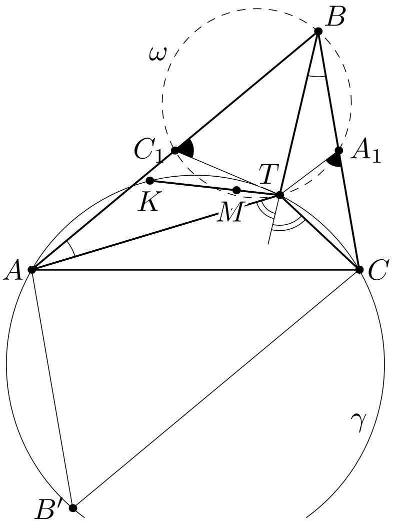

Рис. 2

Второе решение. Пусть AA_1 и CC_1 — медианы в треугольнике ABC. Поскольку $\angle TBC = 60^\circ - \angle TBA = \angle TAB$, треугольники ATB и BTC подобны. Тогда $\angle BC_1T = \angle TA_1C$ как соответственные углы (между стороной и медианой). Значит, точки C_1, A_1, B и T лежат на одной окружности ω.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке M и коэффициентом -2. Эта гомотетия переводит треугольник A_1BC_1 в треугольник $AB'C$, где B' — четвёртая вершина параллелограмма $ABCB'$. Поскольку $\angle AB'C = 60^\circ = 180^\circ - \angle ATC$, точка B' лежит на описанной окружности γ треугольника ATC. Значит.

при нашей гомотетии окружность ω переходит в γ, поэтому точка T переходит в точку K, и $TM/MK = 1/2$.

Третье решение. Пусть O и Q — центры описанных окружностей Ω и γ треугольников ABC и ATC соответственно, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Поскольку $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$ и $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$, точки O и H лежат на γ. Поскольку $\angle AQC = 360^\circ - 2\angle ATC = 120^\circ$, точка Q лежит на Ω. Как и в первом решении, заметим, что прямая BT вторично пересекает γ в точке X, диаметрально противоположной точке O.

Заметим, что $OQ \parallel BH$ и $BO = OQ = QH$. Поскольку $\angle QHB > 90^\circ > \angle OBH$, из этого следует, что $BOQH$ — ромб. Тогда $BH = OQ = OX/2$.

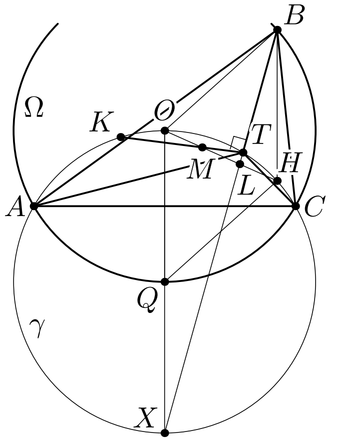

Рис. 3

Пусть BX пересекает OH в точке L; треугольники OLX и HLB подобны с коэффициентом $OX/BH = 2$. Поэтому $HL = HO/3$. Напомним, что точка H переходит в точку O при гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/2$, так что $OM = OH/3$, то есть $OM = ML = LH$.

Значит, TM — медиана в прямоугольном треугольнике OTL, поэтому $TM = MO$. Значит, подобные треугольники OMK и TMH равны, поэтому $MK = MH = 2OM = 2TM$. Отсюда и вытекает ответ.

Замечание. Из последнего решения видно, что $OTHK$ — равнобокая трапеция.

9.7. Натуральные числа $n > 20$ и $k > 1$ таковы, что n делится на k^2. Докажите, что найдутся натуральные числа a, b и c такие, что $n = ab + bc + ca$. (*А. Храбров*)

Решение. Заметим, что из равенства $n + a^2 = (a + b)(a + c)$ следует равенство $n = ab + bc + ca$. Поэтому для решения задачи достаточно найти такое натуральное a, что число $n + a^2$ раскладывается в произведение двух натуральных чисел x

и y, больших a (тогда можно положить $b = x - a$ и $c = y - a$). Согласно условию, $n = \ell p^2$ для некоторых простого p и натурального ℓ.

Если $\ell + 1 > p$, то в силу разложения $n + p^2 = (\ell + 1) \cdot p^2$ в качестве a можно взять число p. Также, если число $\ell + 1$ — составное, то $\ell + 1 = st$ при $s, t > 1$; тогда снова можно положить $a = p$, так как $n + p^2 = (\ell + 1)p^2 = sp \cdot tp$.

В оставшемся случае имеем $n = (q - 1)p^2$ при некоторых простом $q \leqslant p$. Если $p > q$, то $p = mq + r$ при некотором положительном $r < q$ и натуральном m. Тогда число

$$n + r^2 = (q - 1)(r + mq)^2 + r^2 = q(p + mq)^2 - mq(2r + mq)$$

делится на q, а частное от деления больше r, поскольку $n = (q - 1)p^2 > 1 \cdot q \cdot r$. Поэтому можно положить $a = r$.

Наконец, если $p = q$, то $n = p^3 - p^2$, причём $p \geqslant 5$ по условию. Тогда $n + 6^2 = p^3 - p^2 + 36 = (p + 3)(p^2 - 4p + 12)$, где обе скобки больше 6; в этом случае работает $a = 6$.

Замечание. Несложно показать, что в виде $ab + bc + ca$ можно представить все натуральные числа n, для которых число $n + 1$ составное, — в частности, все нечетные числа, отличные от 1. С помощью этого наблюдения и калькулятора несложно найти первые 18 чисел, не представимых в виде $ab + bc + ca$ (все они меньше пятисот). В статье Борвейна и Чоя утверждается, что количество чисел, не представимых в виде $ab + bc + ca$, не более 19, и существование девятнадцатого такого числа противоречило бы обобщенной гипотезе Римана (которая в настоящий момент не является ни доказанной, ни опровергнутой).

9.8. Сотне мудрецов предложили следующее испытание. Их по очереди (в заранее известном порядке) приводят в зал. В зале смотритель предлагает мудрецу на выбор каких-то два различных числа из набора $1, 2, 3$. Мудрец выбирает ровно одно из них, сообщает выбранное число смотрителю и уходит из зала. При этом до своего выбора мудрец имеет право узнать у смотрителя, какое из чисел выбрал каждый из двух предыдущих мудрецов (второй мудрец имеет право узнать про первого). Во время испытания любое общение между мудрецами запрещено. Если в конце сумма всех 100 чисел, выбранных мудрецами, окажется равной 200, то мудрецы провалили испытание; иначе они его выдержали. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о своих действиях так, чтобы гарантированно выдержать испытание. (*С. Берлов*)

Решение. Приведём одну из возможных договорённостей. Каждый мудрец будет пользоваться одной из двух стратегий: либо выбирать из двух предложенных чисел нечётное (*стратегия Н*), либо выбирать из двух чисел большее (*стратегия Б*). Выбирать их они будут так:

(1) Первый мудрец действует по стратегии Б. Второй мудрец действует по стратегии Н, если первый выбрал тройку, иначе он использует стратегию Б.

($*$) k-й мудрец, при $3 \leqslant k \leqslant 99$, действует по стратегии Н, если $(k-1)$-й мудрец выбрал тройку, а $(k-2)$-й — не тройку; иначе он использует стратегию Б.

(100) Сотый мудрец действует по стратегии Б, если 99-й выбрал тройку, а иначе — по стратегии Н.

Проанализируем, что произойдёт к моменту захода сотого мудреца. Выпишем в ряд 99 выбранных к этому моменту чисел в порядке их выбора; пусть S — их сумма. Если в ряду записана единица, то она была выписана по стратегии Н, поэтому прямо перед неё записана тройка, а прямо перед этой тройкой не может стоять другой тройки. Выделим в выписанном ряду эти тройку и единицу. Выделенные пары не пересекаются, сумма в каждой из них равна 4. Все остальные числа в ряду — либо двойки, либо тройки.

Далее, если среди невыделенных чисел есть тройка, рассмотрим первую такую тройку. Либо она стоит в конце ряда (то есть её выбрал 99-й мудрец), либо после неё не может стоять ни единица (иначе она выделена), ни двойка (по алгоритму ($*$)). Поэтому после нашей тройки может стоять лишь тройка, и она тоже не выделена.

Итак, либо все невыделенные числа — двойки (и $S = 198$), либо среди них ровно одна тройка — последняя (и $S = 199$), либо невыделенных троек хотя бы две (и $S \geqslant 200$). В последнем случае мудрецы уже выдержали испытание, ибо после хода последнего мудреца сумма превысит 200.

Иначе мы получаем, что $S = 198$, если 99-й мудрец не назвал 3, и $S = 199$, если назвал. Согласно (100), в первом случае сумма 100 выбранных чисел будет нечётной, а во втором она будет больше 200. Значит, и в этих случаях испытание пройдено.

Критерии оценивания работ 9 класса

5 задача

1. Нет явной ссылки не теорему Виета в обосновании равенства $x_1 \cdot x_2 = b$ — **баллы не снижаются**.

   Утверждается, но не обосновано, почему случай отрицательных корней аналогичен случаю положительных корней — **баллы не снижаются**.

2. Решение не проходит, если некоторые неравенства обращаются в равенства. Для исправления проблем *достаточно* только заменить некоторые знаки $\leqslant, \geqslant$ на $<, >$ или наоборот. При этом других ошибок решение не содержит — **6 баллов**.

   Решение не проходит, если некоторые неравенства обращаются в равенства. Для исправления проблем *недостаточно* изменений в строгости неравенств и нужны дополнительные соображения. При этом других ошибок решение не содержит — **5 баллов**.

3. Рассмотрен только случай $b > 1$ или $b \geqslant 1$ — **2 балла**.

   Рассмотрен только случай $b < 1$ или $b \leqslant 1$ — **3 балла**.

4. Доказано только, что оба корня не могут лежать вне интервала $(-b, +b)$ — **3 балла**.

   Доказано только, что оба корня не могут лежать на интервале $(-b, +b)$ — **2 балла**.

   Комментарий. Баллы по критериям групп 3 и 4 не суммируются.

5. Ни один существенный случай не разобран до конца — **0 баллов**.

6 задача

1. Любая переформулировка задачи в терминах параллельности, подобия, гомотетии и т.п. без дальнейших продвижений — **0 баллов**.

2. Формулировка (доказательство) известных (классических) фактов (свойства симедианы, гармонического четырёхугольника, точки Торричелли, ортоцентра, прямой Эйлера, ...) без существенных продвижений в решении задачи — **0 баллов**.

3. Если в приведённых в работе рассуждениях не доказано существенных свойств точки K — **0 баллов**.

7 задача

1. Следующие продвижения:

   - сведение к случаю, когда k простое;
   - рассмотрены частные случаи, которые образуют одну или несколько арифметических прогрессий, но не покрывают всех возможных n: нечетные n, n делится 4, $\frac{n}{k^2}$ – нечетно и другие;
   - рассмотрен случай составного $(n+1)$, составного $\frac{n+2}{4}$, случай $n = k^2$ и т.п.,

   оцениваются в **0 баллов**.

2. Любое из следующих продвижений:

   - показано, что утверждение задачи равносильно тождеству $n + a^2 = (a+b)(a+c)$;
   - рассмотрен случай составного $(\ell + 1)$, где $n = \ell p^2$, p – простое.

   оцениваются в **1 балл**. Эти баллы не суммируются ни между собой, ни с баллами за другие продвижения.

3. Разобраны все случаи, кроме $\ell < p$ (где $n = \ell p^2$, p — простое) — **2 балла**.

4. Разобраны все случаи, кроме $n = p^3 - p^2$ (где p — простое) — **4 балла**.

8 задача

Критериев нет