

Материалы для проведения
заключительного этапа
XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.



9 класс

- 9.5. Числа $b > 0$ и a таковы, что квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных корня, ровно один из которых лежит на отрезке $[-1; 1]$. Докажите, что ровно один из этих корней лежит в интервале $(-b; b)$. (А. Храбров)
- 9.6. Внутри неравностороннего остроугольного треугольника ABC , в котором $\angle ABC = 60^\circ$, отмечена точка T так, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120^\circ$. Медианы треугольника пересекаются в точке M . Прямая TM пересекает вторично окружность, описанную около треугольника ATC , в точке K . Найдите TM/MK . (А. Кузнецов)
- 9.7. Натуральные числа $n > 20$ и $k > 1$ таковы, что n делится на k^2 . Докажите, что найдутся натуральные числа a , b и c такие, что $n = ab + bc + ca$. (А. Храбров)
- 9.8. Сотне мудрецов предложили следующее испытание. Их по очереди (в заранее известном порядке) приводят в зал. В зале смотритель предлагает мудрецу на выбор каких-то два различных числа из набора 1, 2, 3. Мудрец выбирает ровно одно из них, сообщает выбранное число смотрителю и уходит из зала. При этом до своего выбора мудрец имеет право узнать у смотрителя, какое из чисел выбрал каждый из двух предыдущих мудрецов (второй мудрец имеет право узнать про первого). Во время испытания любое общение между мудрецами запрещено. Если в конце сумма всех 100 чисел, выбранных мудрецами, окажется равной 200, то мудрецы провалили испытание; иначе они его выдержали. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о своих действиях так, чтобы гарантированно выдержать испытание. (С. Берлов)