Решение

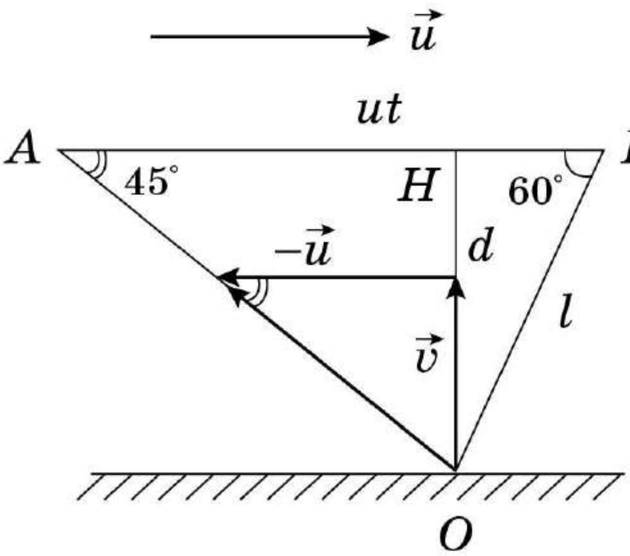
T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 12.00 Определите скорость течения реки.

В системе отсчета, связанной с водой, плот движется под углом 45° к берегу (что следует из закона сложения скоростей) и за время t перемещается на расстояние OA. За это же время река сносит его на расстояние $AB = ut$. Заметим, что расстояние $AH = OH = d$.



С учетом теоремы Пифагора $(HB)^2 = l^2 – d^2$ и соотношения $ut = AH + HB$, получим:

$$u = \frac{\sqrt{l^2 - d^2} + d}{t}$$

Ответ: $u \approx 3,14$м/с.

Разбалловка

1 12.00 Определите скорость течения реки.

Идея перехода в систему отсчета (СО) реки, если это привело к логически верным преобразованиям, направленным на решение задачи. т.е. баллы ставятся, если далее получены баллы за пункты 1.2 или 1.3	2.00
Найдено направление начальной скорости плота в СО реки	1.00
Учтено, что направление скорости плота в СО реки не изменяется	1.00
M1 Решение в частном случае Например: сила трения постоянна, $F = kv, F = kv^2 \ldots$ (если выполнен этот пункт, то баллы за пункты 1.6, 1.7, 1.8 не ставятся)	0.00
M2 Связь перемещений плота в СО берега и в СО реки	3.00
M2 Теорема Пифагора или тригонометрическое соотношение, устанавливающие связь между сторонами и высотой треугольника OAB	2.00
M2 Получено выражение для скорости течения	2.00
Найдено численное значение скорости и указаны единицы измерений	1.00

Решение

T **Условие**

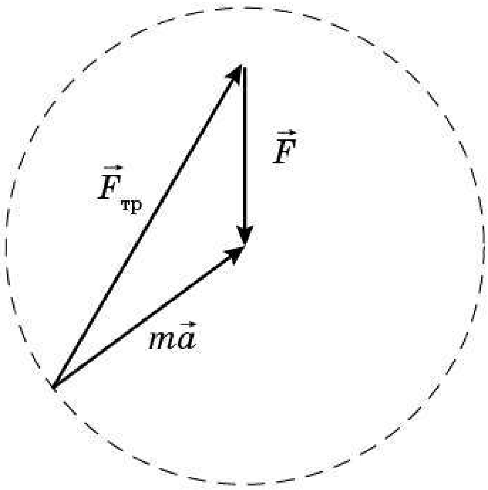
S **Решение**

M **Разбалловка**

1 7.00 За какое минимальное время τ танк, двигаясь с постоянной скоростью, сможет проехать по окружности радиуса R?

Ускорение танка, движущегося с постоянной скоростью v, равно $a = \frac{v^2}{R}$ и в любой точке траектории направлено вдоль наклонной плоскости к центру окружности.

В плоскости, в которой происходит движение, лежат: вектор силы трения покоя (гусеницы не проскальзывают) $F_{\text{тр}}$, вектор ma и $F = mg\sin\alpha$ – составляющая вектора силы тяжести вдоль плоскости. В перпендикулярном к плоскости направлении на танк действует сила нормальной реакции $N = mg\cos\alpha$.



Сила трения покоя может принимать любое значение из интервала

$$0 < F_{\text{тр}} < \mu mg\cos\alpha.$$

Чтобы время движения танка было минимальным, он должен двигаться с максимально возможной скоростью. Но при больших скоростях силы трения может не хватать для движения с нужным ускорением.

Выразим силу трения из второго закона Ньютона:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a} - \vec{F}.$$

Из полученной формулы следует, что модуль разности векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ максимален, когда эти векторы направлены противоположно, т.е. в нижней точке траектории. Следовательно, танк сможет пройти всю траекторию с постоянной скоростью v, если выполнится условие:

$$m\frac{v^2}{R} \leqslant \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha,$$

которое и определяет максимальную скорость:

$$v_{max} = \sqrt{gR(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)},$$

и минимальное время движения танка по окружности:

Ответ:

$$t_{min} = \frac{2\pi R}{v_{max}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

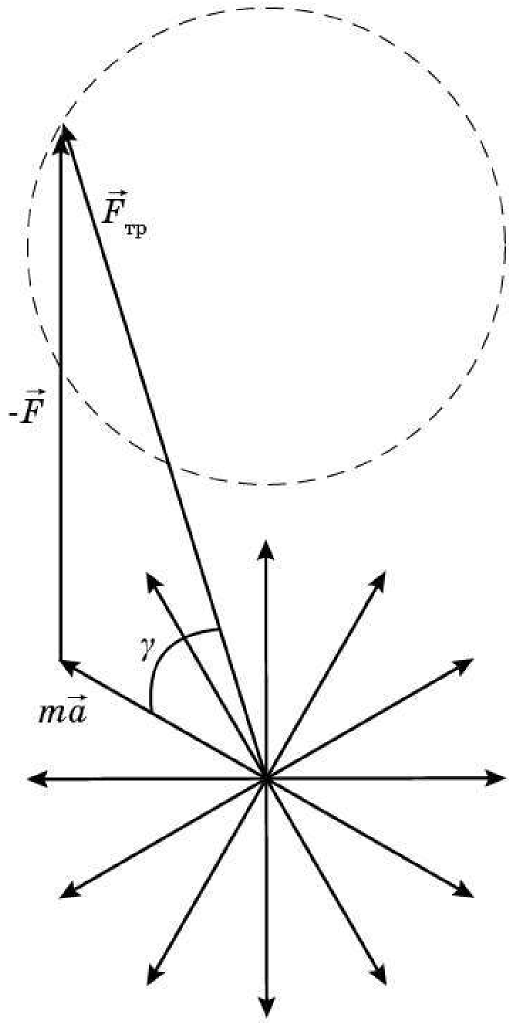
Разумеется, все это справедливо при $\mu > tg\alpha$, в противном случае без проскальзывания танк не смог бы даже стоять на месте.

2 5.00 Чему будет равен максимальный угол γ между векторами силы трения и ускорения танка во время этого движения?

Найдем максимальный угол между вектором силы трения и ускорения танка. Поскольку вектор $m\vec{a}$ имеет фиксированную величину, но разное направление в разных точках траектории, а вектор $\vec{F}$ – фиксированную величину и направление, то геометрически формула

$$\vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a} - \vec{F}$$

означает, что концы векторов сил трения лежат на окружности с радиусом, равным модулю вектора $m\vec{a}$, а их начала находятся в точке, которая сдвинута на величину $\vec{F}$ по отношению к центру этой окружности (см. рисунок; показано вычитание только одной пары векторов).



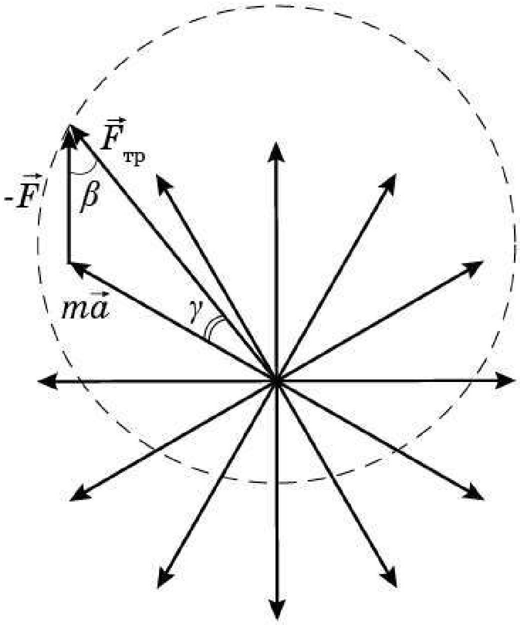
Как следует из рисунка, может реализовываться два варианта.
1) Если модуль силы $\vec{F}$ больше модуля вектора $m\vec{a}$ или

$$mg\sin\alpha > mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \Rightarrow \mu < 2tg\alpha(\text{малое трение}),$$

сдвиг окружности, на которой лежат концы вектора силы трения, больше ее радиуса (именно этот случай показан на рисунке), и угол γ между вектором силы трения и вектором $m\vec{a}$ (отмечен дугой на рисунке) изменяется от $\gamma = 0^\circ$ (векторы $m\vec{a}$ и силы $\vec{F}$ сонаправлены) до $\gamma = 180^\circ$ (векторы $m\vec{a}$ и силы $\vec{F}$ направлены противоположно).
Если же модуль силы $\vec{F}$ меньше модуля вектора $m\vec{a}$, или

$$mg\sin\alpha < mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \Rightarrow \mu > 2tg\alpha(\text{большое трение}),$$

то и в случае сонаправленных векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$, и в случае противоположно направленных, угол между векторами $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ равен нулю, и, следовательно, существует максимальный угол между этими векторами (вычитание векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ выполнено на рисунке).



Для нахождения этого угла можно применить теорему синусов к треугольнику сил:

$$\frac{F}{\sin\gamma} = \frac{ma}{\sin\beta},$$

где β – угол между вектором силы трения и вектором $-\vec{F}$ (см. рисунок). Поскольку модули векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ неизменны во всех точках траектории, то угол γ максимален, когда максимален синус угла β, т.е. $\beta = 90^\circ$. В этом случае синус максимального угла между векторами силы трения и ускорения равен:

Ответ:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{\mu\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{tg\alpha}{\mu - tg\alpha}$$

Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 7.00 За какое минимальное время τ танк, двигаясь с постоянной скоростью, сможет проехать по окружности радиуса R?

Найдена (или используется) величина силы нормальной реакции	0.50
Найдена составляющая силы тяжести вдоль плоскости	0.50
Записано уравнение (или дана геометрическая интерпретация) второго закона Ньютона	1.00
Записано уравнение для центростремительного ускорения	0.50
Записано неравенство $F_{\text{тр}} \leqslant \mu N$	0.50
Обосновано максимальное значение силы трения покоя при движении с постоянной скоростью v. ($F_{\text{тр}max} = \dfrac{mv^2}{R} + mg\sin\alpha$)	1.00
Получено выражение для максимальной скорости	1.00
Найдено минимальное время τ	1.00
Учтено ОДЗ для времени	1.00

2 5.00 Чему будет равен максимальный угол γ между векторами силы трения и ускорения танка во время этого движения?

1 случай	
Найдено значение угла 180°	1.00
Указано при каких μ реализуется данный случай	0.50
2 случай	
Найден угол γ	3 × 1.00
Указано при каких μ реализуется данный случай	0.50

Решение

I Условие

S Решение

M Разбалловка

1 7.50 Найдите какая температура установится в баке через большое время?

1. Стакан с отводной трубкой работает по принципу сифона. Первый раз уровень воды в нем повышается в течение времени 5τ. После заполнения горизонтальной части трубки вода быстро отводится из стакана и ее уровень опускается на $4h$. Далее процесс повторяется с периодичностью 4τ.
Таким образом, за первые 5τ в бак поступает только холодная вода и в первом теплообмене принимает участие $4\tau\mu$ горячей воды и $2\tau2\mu$ холодной. Из уравнения теплового баланса:

$$4\tau\mu c(t_{x1}-t_1)+4\tau\mu c(t_{x1}-t_2)=0,$$

находим температуру в баке после первого теплообмена%

$$t_{x1}=\frac{t_1+t_2}{2}=55^{\circ}\mathrm{C}$$

2. В течении следующего интервала времени 4τ в бак поступает только холодная вода и температура содержимого бака понижается до t_{x2}. Из уравнения теплового баланса:

$$4\tau\mu c(t_{x2}-t_1)+12\tau\mu c(t_{x2}-t_2)=0,$$

$$t_{x2}=\frac{t_1+3t_2}{4}=37,5^{\circ}\mathrm{C}$$

3. Очередная порция горячей воды массой $4\tau\mu$ повысит температуру бака до t_{x3}:

$$8\tau\mu c(t_{x3}-t_1)+12\tau\mu c(t_{x3}-t_2)=0,$$

$$t_{x3}=\frac{2t_1+3t_2}{5}=48^{\circ}\mathrm{C}$$

4. К моменту времени 10τ в бак добавится еще $2\tau\mu$ холодной воды, и к этому моменту температура в баке станет t_{x4}.

$$8\tau\mu c(t_{x4}-t_1)+14\tau\mu c(t_{x4}-t_2)=0,$$

$$t_{x4}=\frac{4t_1+7t_2}{11}=45,5^{\circ}\mathrm{C}$$

5. За цикл 4τ в бак добавляется $4\tau\mu$ горячей и $8\tau\mu$ холодной воды. Эта смесь имеет среднюю температуру t_x:

$$4\tau\mu c(t_x-t_1)+8\tau\mu c(t_x-t_2)=0,$$

$$t_{x4}=\frac{1t_1+72t_2}{3}=43,3^{\circ}\mathrm{C}$$

Поэтому температура в баке больше чем до $t_{x1}=55^{\circ}\mathrm{C}$ подниматься уже не будет.

Ответ:

$$t_{x1}=55^{\circ}\mathrm{C}$$

2 2.00 Какого максимального значения достигала температура в баке?

Через большое количество циклов температура установится равной t_x.

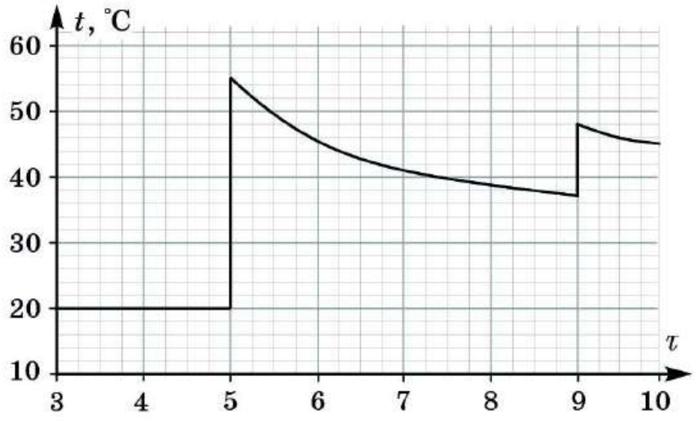
Ответ:

$$t_x=43,3^{\circ}\mathrm{C}$$

3 [2.50] Постройте график зависимости температуры воды в баке от времени для интервала от 3τ до 10τ от начала заполнения стакана.

Заметим, что участки графика, соответствующие уменьшению температуры воды внутри периодов 4τ, не линейные, а являются участками гипербол. Искомый график имеет вид:

Ответ:



Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 [7.50] Найдите какая температура установится в баке через большое время?

Определение характерных времён	
Замечен периодический характер работы сифона	0.50
Найден период работы сифона (4τ)	1.00
Определение характерных температур. **Примечание: при отсутствии уравнений теплового баланса баллы в этом разделе не ставятся**	
Найдена температура в баке сразу после первого срабатывания сифона ($55^\circ\mathrm{C}$)	1.00
Найдена температура воды в баке непосредственно перед вторым переливанием воды через сифон ($37{,}5^\circ\mathrm{C}$)	1.00
Найдена температура воды в баке непосредственно после второго переливания воды через сифон ($48^\circ\mathrm{C}$)	1.00
Найдена температура воды в баке спустя время 10τ $(45{,}5^\circ\mathrm{C})$	1.00
Найдена температура, которая установится в баке через большое время ($43{,}3^\circ\mathrm{C}$)	2.00

2 [2.00] Какого максимального значения достигала температура в баке?

Обосновано, что температура воды в баке не превысит $55^\circ\mathrm{C}$	2.00

3 [2.50] Постройте график зависимости температуры воды в баке от времени для интервала от 3τ до 10τ от начала заполнения стакана.

График зависимости температуры от времени	
Выбран разумный масштаб, оси подписаны и оцифрованы	0.50
Горизонтальная прямая от 3τ до 5τ при $t = 20^\circ\mathrm{C}$	0.50
Вогнутая гипербола от $(5\tau; 55^\circ\mathrm{C})$ до $(9\tau; 37{,}5^\circ\mathrm{C})$	1.00
Вогнутая гипербола от $(9\tau; 48^\circ\mathrm{C})$	0.50

Решение

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 12.00 Какова начальная температура ареометров в лаборатории Глюка?

А) Рассмотрим первый случай, когда температура ареометров t_0 выше, чем начальная температура жидкости. Тогда начальная температура жидкости (по графику) равна $21,5^{\circ}\mathrm{C}$, а установившаяся в результате теплообмена с ареометром – $26,5^{\circ}\mathrm{C}$. Пусть $C_{\text{ж}}$ – теплоёмкость жидкости, $C_{\text{а}}$ – теплоёмкость ареометра. Запишем уравнение теплового баланса:

$$C_{\text{ж}} \cdot 5^{\circ}\mathrm{C} = C_a(t_0 - 26,5^{\circ}\mathrm{C}).$$

После опускания второго ареометра температура жидкости увеличивается и становится равной $27,4^{\circ}\mathrm{C}$. Запишем уравнение теплового баланса для двух ареометров:

$$C_{\text{ж}}(27,4^{\circ}\mathrm{C} - 21,5^{\circ}\mathrm{C}) = 2C_a(t_0 - 27,4^{\circ}\mathrm{C}).$$

Отсюда:

$$\frac{5,9^{\circ}\mathrm{C}}{5^{\circ}\mathrm{C}} = \frac{2(t_0 - 27,4^{\circ}\mathrm{C})}{(t_0 - 26,5^{\circ}\mathrm{C})} \Rightarrow t_0 = \frac{10 \cdot 27,4^{\circ}\mathrm{C} - 5,9 \cdot 26,5^{\circ}\mathrm{C}}{10 - 5,9} = 28,7^{\circ}\mathrm{C}.$$

Б) Рассмотрим второй случай, когда температура ареометров t_0 ниже, чем начальная температура жидкости. Тогда начальная температура жидкости равна $26,5^{\circ}\mathrm{C}$, а установившаяся в результате теплообмена с первым ареометром $21,5^{\circ}\mathrm{C}$. Запишем уравнение теплового баланса:

$$C_{\text{ж}} \cdot 5^{\circ}\mathrm{C} = C_a(21,5^{\circ}\mathrm{C} - t_0).$$

После опускания второго ареометра температура жидкости уменьшается и становится равной $20,5^{\circ}\mathrm{C}$. Запишем уравнение для двух ареометров:

$$C_{\text{ж}}(26,5^{\circ}\mathrm{C} - 20,5^{\circ}\mathrm{C}) = 2C_a(20,5^{\circ}\mathrm{C} - t_0).$$

Отсюда:

$$\frac{6^{\circ}\mathrm{C}}{5^{\circ}\mathrm{C}} = \frac{2(20,5^{\circ}\mathrm{C} - t_0)}{(21,5^{\circ}\mathrm{C} - t_0)} \Rightarrow t_0 = \frac{10 \cdot 20,5^{\circ}\mathrm{C} - 6 \cdot 21,5^{\circ}\mathrm{C}}{10 - 6} = 19^{\circ}\mathrm{C}.$$

Ответ: $19^{\circ}\mathrm{C}$ или $28,7^{\circ}\mathrm{C}$

Разбалловка

I Условие

S Решение

M Разбалловка

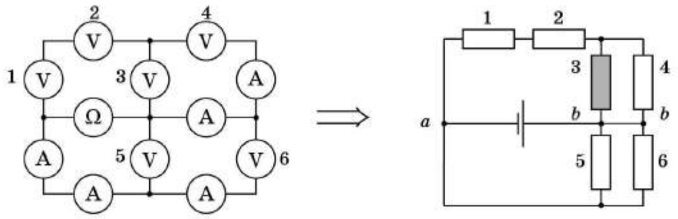
1 12.00 Какова начальная температура ареометров в лаборатории Глюка?

Указано, что первое значение плотности соответствует начальной температуре воды, а второе – установившейся температуре	1.00
Указано, что существуют два случая: 1) температура ареометра меньше начальной температуры воды; 2) температура ареометра больше начальной температуры воды	1.00
M1 Нет явного указания, что существуют два случая	0.00
Определение по графику возможных начальных и конечных температур:	
Найдены температуры, соответствующие плотности $1,027\text{кг}/\text{м}^3$ ($t_1 = 21{,}5^\circ\text{C}$ и $t_2 = 26{,}3^\circ\text{C} - 26{,}5^\circ\text{C}$)	1.00
Найдена установившаяся температура в первом случае ($t_{\text{у}1} = 20,5^\circ\text{C}$)	0.50
Найдена установившаяся температура во втором случае ($t_{\text{у}2} = 27,3^\circ\text{C} - 27,5^\circ\text{C}$)	0.50
Уравнения теплового баланса. **Если приведены уравнения теплового баланса в общем виде и не выполнен п1.2, баллы ставятся только за один случай**	
Первый случай:	
Первый теплообмен	1.00
Второй теплообмен	2.00
Второй случай	
M2 Первый теплообмен	1.00
M2 Второй теплообмен	2.00
Числовые ответы:	
Первый случай $t_{01} = 18{,}7^\circ\text{C} - 19{,}3^\circ\text{C}$	1.00
Второй случай $t_{02} = 28{,}5^\circ\text{C} - 29{,}0^\circ\text{C}$	1.00

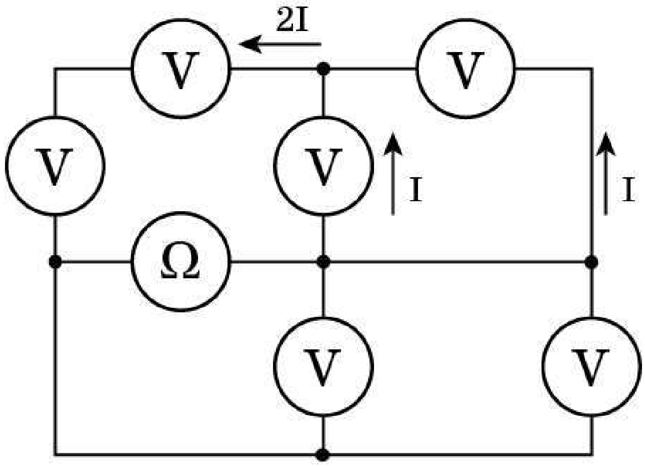
Решение

1 12.00 По известным показаниям вольтметра V_1 и амперметра A_1 ($U_1 = 1\text{В}$, $I_1 = 6\text{мкА}$) определите показания остальных приборов в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке. Все вольтметры одинаковые и их сопротивления гораздо больше сопротивлений амперметров.

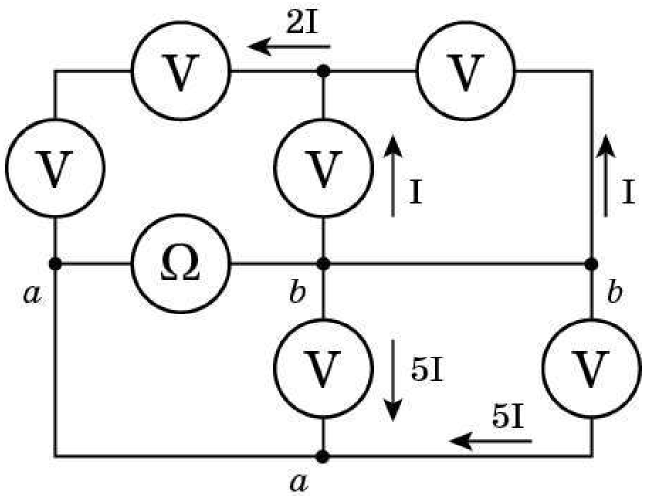
Роль источника тока в цепи выполняет омметр. Так как сопротивления амперметров малы и цепь не содержит контуров без вольтметров, величины токов во всех ветвях определяются сопротивлениями вольтметров, которые можно рассматривать как резисторы с сопротивлениями R_V.
Эквивалентная схема цепи может быть представлена так:



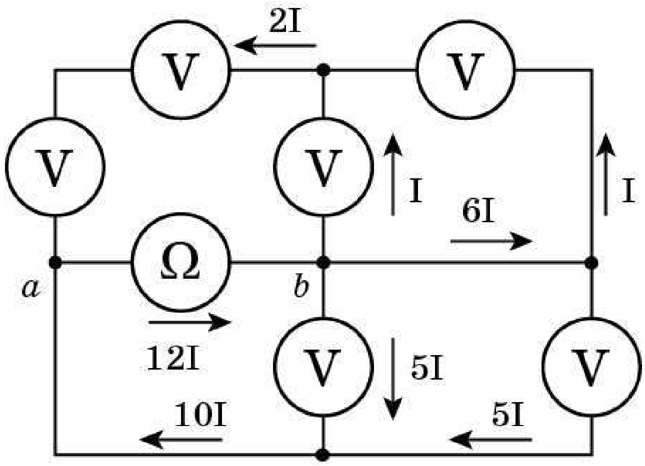
Здесь вольтметры обозначены как резисторы (цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 показано соответствие вольтметров резисторам), амперметры заменены идеальными проводниками, омметр обозначен как источник тока, выделены проводник, через который задан ток (bb), и вольтметр, на котором задано напряжение (№ 3).
Соотношения между силами тока в ветвях упрощенной схемы можно найти с помощью закона Ома и с учетом первого правила Кирхгофа.
Обозначим ток, текущий через вольтметр № 3, за I, тогда такой же ток будет течь и через вольтметр № 4, а через вольтметры № 1 и № 2, пойдет ток $2I$.



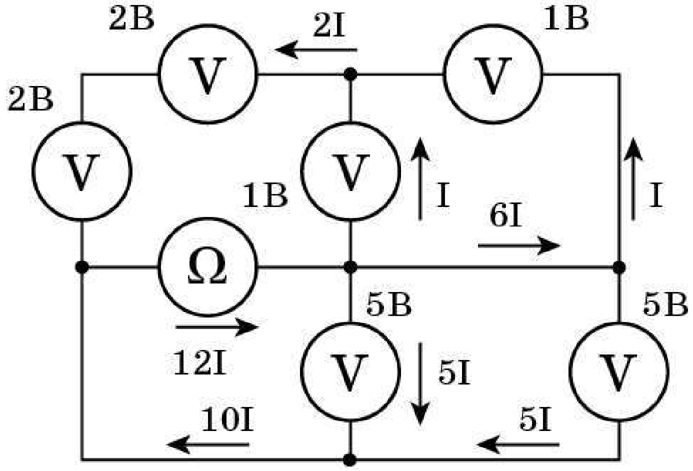
Так как напряжение между узлами b и а равно $5IR_V$, то через вольтметры № 5 и №6 пойдут токи по $5I$.



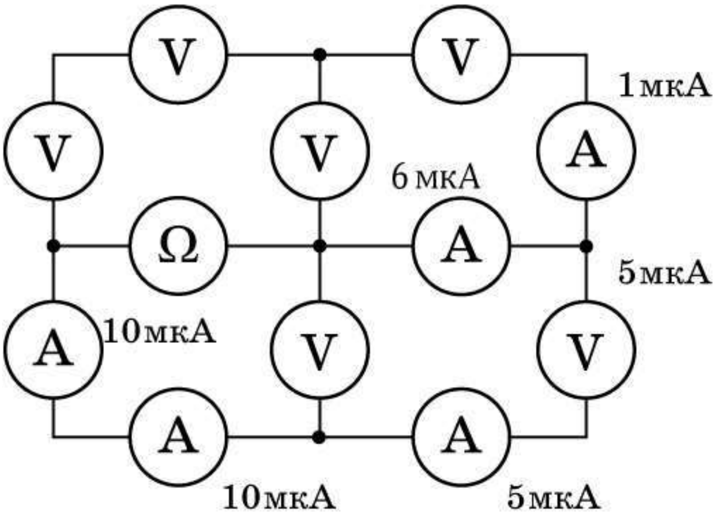
Применяя первое правило Кирхгофа, найдем оставшиеся токи через перемычки и омметр:



Из-за равенства сопротивлений показания вольтметров пропорциональны величинам сил токов, протекающих через них.



Аналогично, пропорциональны токам и показания амперметров.



Показания омметра можно найти, разделив напряжение на внешней цепи между узлами a и b, на силу тока, протекающего через омметр:

Ответ: $R_\Omega = 5В/12мкА = 417кОм.$

Разбалловка

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 12.00 По известным показаниям вольтметра V_1 и амперметра A_1 ($U_1 = 1\text{В}$, $I_1 = 6\text{мкА}$) определите показания остальных приборов в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке. Все вольтметры одинаковые и их сопротивления гораздо больше сопротивлений амперметров.

Идея пренебречь сопротивлениями амперметров и определить токи, текущие через вольтметры	1.00
Эквивалентная схема	1.00
Исходные уравнения, обосновывающие соотношение токов в цепи	2.00
Найдены токи через вольтметры и их показания	2.00
Найдены показания амперметров	2.00
Найдены показания омметра	4.00