Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике

Решения задач

Москва, декабрь 2020

Во всех трёх классах участникам отводилось 120 минут на решение олимпиады.

Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера приведена только одна версия задачи с решением.

Содержание

9 класс

Задача 9.1. Найдите наибольшее пятизначное число, произведение цифр которого равно 120.

Ответ: 85311.

Решение. Наибольший однозначный делитель числа 120 — 8, поэтому искомое число точно начинается с этой цифры. Произведение всех оставшихся цифр равняется 15.

Наибольший однозначный делитель числа 15 — 5, поэтому в разряде тысяч будет стоять именно эта цифра. Произведение последних трёх цифр равняется трём 3, поэтому наибольшее число будет заканчиваться на 311. □

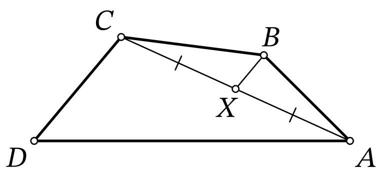
Задача 9.2. В течение первого полугодия лентяй Паша заставлял себя решать задачи по математике. Каждый день он решал не более 10 задач, а если в какой-нибудь день он решал больше 7 задач, то следующие два дня он решал не более 5 задач в день. Какое наибольшее количество задач Паша мог решить за 7 подряд идущих дней?

Ответ: 52.

Решение. Предположим, Паша решил в один из первых пяти дней хотя бы 8 задач (но не больше 10), тогда в следующие два дня он решал не более 5 задач в день. Таким образом, за эти три дня он решил не более 20 $(10 + 5 + 5)$ задач. Если бы он в каждый из этих дней решал по 7 задач, то вышло бы больше.

Получается, в первые пять дней Паша решил не более 35 задач. Осталось заметить, что в последние два дня он решил не более 17 задач (так как он не мог в оба дня превысить порог в 7 задач), при этом 17 задач он решить мог (7 задач в шестой день и 10 задач в седьмой день). □

Задача 9.3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, X — середина диагонали AC. Оказалось, что $CD \parallel BX$. Найдите AD, если известно, что $BX = 3$, $BC = 7$, $CD = 6$.



Ответ: 14.

Решение. Удвоим медиану BX треугольника ABC, получим точку M. Четырёхугольник $ABCM$ — параллелограмм (рис. 1).

Заметим, что $BCDM$ также является параллелограммом, так как отрезки BM и CD равны по длине (оба по 6) и параллельны. Это означает, что точка M лежит на отрезке AD, так как $AM \parallel BC$ и $MD \parallel BC$.

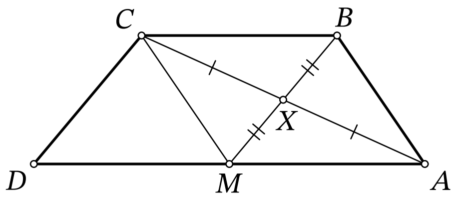


Рис. 1: к решению задачи 9.3

Теперь нетрудно найти искомый отрезок:

$$AD = AM + MD = BC + BC = 14\,. \qquad \square$$

Задача 9.4. Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{a+b+c}{a+b-c} = 7\,, \qquad \frac{a+b+c}{a+c-b} = 1{,}75\,.$$

Чему равняется $\frac{a+b+c}{b+c-a}$?

Ответ: 3,5.

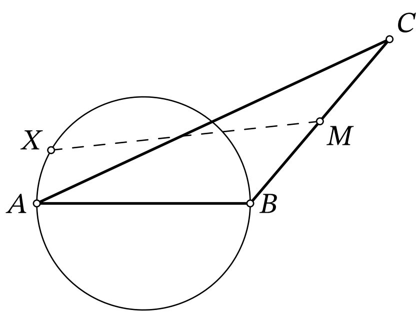
Решение. Пусть $\frac{a+b+c}{b+c-a} = x$. Заметим, что

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{1{,}75} + \frac{1}{x} = \frac{a+b-c}{a+b+c} + \frac{a+c-b}{a+b+c} + \frac{b+c-a}{a+b+c} = 1\,;$$

$$\frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{x} = 1\,;$$

$$x = 3{,}5\,. \qquad \square$$

Задача 9.5. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC, в котором $AB = 17$, $AC = 30$, $BC = 19$. На стороне AB как на диаметре построена окружность. На этой окружности выбирается произвольная точка X. Какое минимальное значение может принимать длина отрезка MX?



Ответ: 6,5.

Решение. Чтобы отрезок MX был минимальным, нам необходимо, чтобы точка X лежала на отрезке MO, где O — центр окружности (а также середина стороны AB), как изображено на рис. 2.

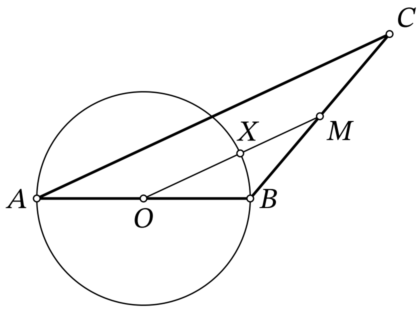


Рис. 2: к решению задачи 9.5

Осталось заметить, что $OM = \frac{1}{2}AC$ (это средняя линия), а $OX = \frac{1}{2}AB$ (это радиус окружности, построенной на AB как на диаметре). Получаем

$$MX = OM - OX = \frac{1}{2}(AC - AB) = 6{,}5\,. \qquad \square$$

Задача 9.6. Дана белая клетчатая таблица 8×8. В ней 20 клеток покрасили в чёрный цвет. Какое наименьшее количество пар соседних по стороне белых клеток могло остаться?

Ответ: 34.

Решение. Пару клеток, соседних по стороне, будем называть просто *парой.* Посчитаем для начала общее количество пар. Во всех строках и столбцах их по 7, поэтому всего пар $7 \cdot 8 \cdot 2 = 112$.

Назовём клетки, примыкающие к границе таблицы, *граничными,* а не примыкающие — *средними.* Среди 20 чёрных клеток рассмотрим наибольшее количество средних чёрных клеток, никакие две из которых не являются соседними по стороне. Эти чёрные клетки назовём *главными,* пусть их s. Поскольку все средние клетки таблицы можно разбить на $\frac{6^2}{2} = 18$ непересекающихся пар (доминошками 1×2), в каждой из которых не более одной главной чёрной клетки, то $s \leqslant 18$.

В изначально белой таблице будем закрашивать чёрные клетки по одной, пока их не станет 20, начиная с s главных чёрных клеток. Будем говорить, что чёрная клетка *портит* пару соседних, если она в ней находится. Каждая из главных чёрных клеток портит 4 пары, поэтому суммарно они портят $4s$ пар. Далее закрашиваем в чёрный цвет в произвольном порядке средние неглавные клетки (которые уже содержатся хотя бы в одной испорченной паре) и граничные клетки (которые в принципе содержатся в трёх или двух парах). Оставшиеся $20 - s$ чёрных клеток портят не более 3 пар каждая, поэтому суммарно они портят не более $3(20 - s) = 60 - 3s$ новых пар. Итого всего испорчено не более $4s + 60 - 3s = 60 + s \leqslant 60 + 18 = 78$ пар. Тогда неиспорченных пар, состоящих только из белых клеток, не менее $112 - 78 = 34$.

Пример на 34 пары белых клеток так и строится: надо рассмотреть 18 главных чёрных клеток и ещё 2 граничных, каждая из которых не образует пару с другими чёрными клетками (рис. 3). □

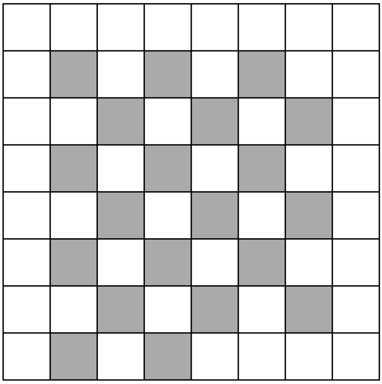
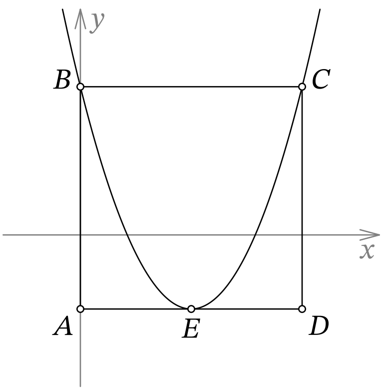


Рис. 3: к решению задачи 9.6

Задача 9.7. Стороны квадрата $ABCD$ параллельны осям координат, причём AB лежит на оси ординат, а сам квадрат расположен так, как показано на рисунке. Парабола, задаваемая уравнением

$$y = \frac{1}{5}x^2 + ax + b\,,$$

проходит через точки B и C. Кроме этого, вершина этой параболы (точка E) лежит на отрезке AD. Найдите сумму корней квадратного трёхчлена, графиком которого является парабола.



Ответ: 20.

Решение. Заметим, что парабола симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через её вершину, точку E. Так как точки B и C находятся на одной горизонтальной прямой, то они симметричны относительно этой оси. Это означает, что такая ось проходит через середину BC, а значит, и через середину AD.

Теперь, когда мы установили, что E является серединой AD, найдём длину стороны квадрата $ABCD$. Выделив из трёхчлена полный квадрат, получим

$$y = \frac{1}{5}(x - x_E)^2 + y_E\,,$$

где (x_E, y_E) — координаты вершины параболы (аналогично будем обозначать координаты других отмеченных точек). Подставим $x = x_B$, $y = y_B$ (равенство будет выполнено, так как B принадлежит параболе) и перенесём y_E в левую часть:

$$y_B - y_E = \frac{1}{5}(x_B - x_E)^2\,.$$

Если неизвестную сторону квадрата обозначить за L, то $y_B - y_E = L$ и $x_B - x_E = L/2$. Получаем соотношение $L = \frac{1}{5}(L/2)^2$, откуда нетрудно извлечь $L = 20$.

Осталось вспомнить, что точки графика, соответствующие корням трёхчлена, также симметричны относительно оси параболы, а значит, полусумма корней равна абсциссе вершины $x_E = L/2$. Следовательно, сумма корней равна $L = 20$. □

Задача 9.8. По кругу стоят 73 ребёнка. Злой Дед Мороз обходит круг по часовой стрелке и раздаёт конфеты. Вначале он выдал первому ребёнку одну конфету, затем 1 ребёнка пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем 2 детей пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем 3 детей пропустил и так далее.

Раздав 2020 конфет, он ушёл. Сколько детей так и не получили конфеты?

Ответ: 36.

Решение. Пронумеруем детей по часовой стрелке от 0 до 72. Вначале Дед Мороз выдаёт конфету ребёнку с номером 1.

Рассмотрим последовательность чисел $a_n = 1+2+3+...+n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots, 2020$. Заметим, что n-ю конфету Дед Мороз выдаёт ребёнку с номером, равным остатку от деления a_n на 73. Выясним, сколько среди этих остатков различных.

Рассмотрим разность $a_k - a_l$ (при $k \geqslant l$). Это сумма арифметической прогрессии:

$$a_k - a_l = (l+1) + (l+2) + \ldots + k = \frac{1}{2}(k+l+1)(k-l)\,.$$

Остатки от деления a_k и a_l на 73 будут совпадать, если эта разность делится на 73. Так как 73 простое, то для этого либо $k - l$, либо $k + l + 1$ должно делиться на 73.

Сначала заметим, что все конфеты, начиная с 74-й, достанутся тем детям, которым они уже достались на предыдущих шагах, так как $k-(k-73)$ делится на 73, и потому числа a_k и a_{k-73} дают одинаковые остатки от деления на 73. Таким образом, достаточно рассмотреть a_k при $k = 1, \dots, 73$.

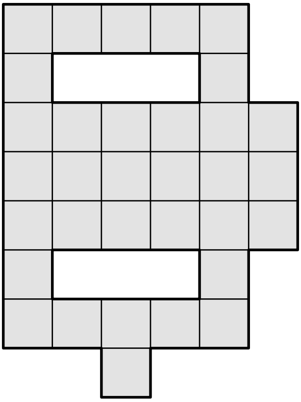
При различных натуральных k и l, не превосходящих 73, разность $k-l$ не будет делиться на 73. Чтобы сумма $k+l+1$ делилась на 73, она должно быть равна либо 73, либо $2 \cdot 73$. В первом случае получаем $l = 72 - k$, где $k = 1, \dots, 71$ и $k \neq 36$, а во втором только $k = 72$ и $l = 73$ (и наоборот).

Это означает, что одинаковые остатки будут в парах $(a_1, a_{71}), (a_2, a_{70}), \ldots, (a_{35}, a_{37}), (a_{72}, a_{73})$. Между парами остатки различаются (и с числом a_{36} тоже). Всего получается 37 разных остатков.

Итак, среди 73 детей только 37 получат конфеты. Следовательно, 36 детей останутся без конфет. $\square$

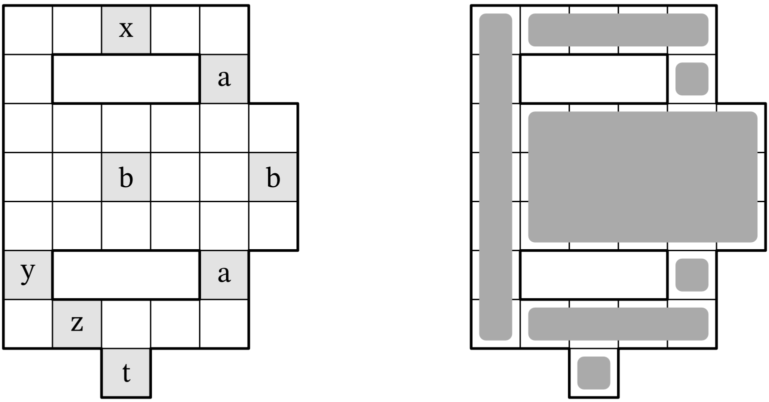
10 класс

Задача 10.1. На какое наименьшее число клетчатых прямоугольников можно разрезать фигуру на рисунке ниже? (Каждый прямоугольник должен состоять из одной или нескольких клеток фигуры.)



Ответ: 7.

Решение. Рассмотрим восемь клеток, отмеченных буквами на рис. 4a.



(a) (b)

Рис. 4: к решению задачи 10.1

Легко видеть, что клетки с разными буквами не могут оказаться в одном и том же прямоугольнике. Различных букв там шесть, значит, и прямоугольников хотя бы шесть.

Но если бы прямоугольников было ровно шесть, то один из них накрывал бы обе клетки «a», а другой — обе клетки «b». Это, очевидно, невозможно. Значит, прямоугольников не менее семи.

Пример разрезания на 7 прямоугольников приведён на рис. 4b. □

Задача 10.2. Сколько корней имеет уравнение

$$\overbrace{f(f(\ldots f}^{10\text{ раз } f}(x)\ldots)) + \frac{1}{2} = 0,$$

где $f(x) = |x| - 1$?

Ответ: 20.

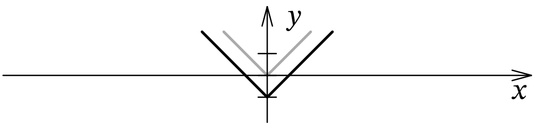
Решение. Обозначим

$$f_n(x) = \overbrace{f(f(\ldots(f}^{n\text{ раз } f}(x)\ldots)).$$

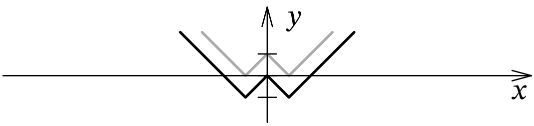
Будем графически решать уравнение $f_{10}(x) = -\frac{1}{2}$.

Воспользуемся тем, что график $y = f_k(x)$ можно получить из графика $y = f_{k-1}(x)$, опираясь на соотношение $f_k(x) = |f_{k-1}(x)| - 1$. А именно, чтобы построить следующий график, нужно взять предыдущий, все точки с отрицательными ординатами отразить относительно оси абсцисс (получив $y = |f_{k-1}(x)|$), а потом сдвинуть весь график вниз на 1.

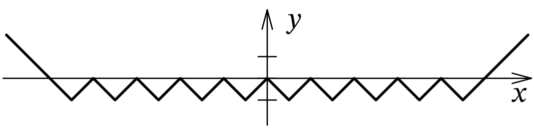
Начнём с графика $y = f(x)$ (серым изображён $y = |x|$):



Отразив его нижнюю часть относительно оси абсцисс, получим $y = |f(x)|$ (изображён ниже серым), а сдвинув на 1 вниз, получим $y = f_2(x)$:



Повторив так ещё 8 раз, придём к такому графику:



Ясно, что у него ровно 20 пересечений с прямой $y = -\frac{1}{2}$. □

Задача 10.3. Антон выписал на доску три натуральных числа a, b и c. А Ира нарисовала на доске три прямоугольника $a \times b$, $a \times c$ и $b \times c$. Оказалось, что разность площадей какой-то пары прямоугольников равна 1, а разность площадей другой пары прямоугольников равна 49. Чему может быть равно $a + b + c$? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 16.

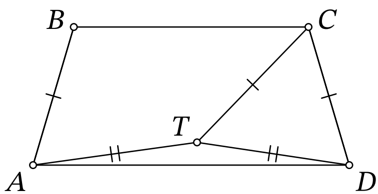
Решение. Без ограничения общности будем считать, что $1 = ac - ab = a(c - b)$, тогда $a = 1$, $c = b + 1$. Таким образом, на доску были выписаны числа $1, b, b + 1$.

Заметим, что либо $b(b + 1) - b \cdot 1 = 49$, либо $b(b + 1) - (b + 1) \cdot 1 = 49$.

В первом случае получаем, что $b^2 = 49$, $b = 7$, а $a + b + c = 1 + b + (b + 1) = 16$.

Во втором случае получаем, что $b^2 = 50$. Таких натуральных b не существует. □

Задача 10.4. Равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такова, что $\angle ADC = 2\angle CAD = 82°$. Внутри трапеции выбрана точка T так, что $CT = CD$, $AT = TD$. Найдите $\angle TCD$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 38°.

Решение. Обозначим за a длину боковой стороны трапеции. Заметим, что точка T лежит на серединном перпендикуляре к основаниям трапеции, то есть на её оси симметрии. Из симметрии получаем, что $BT = TC = a$ (рис. 5).

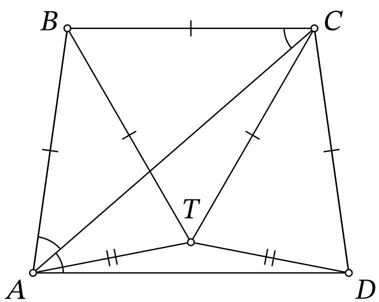


Рис. 5: к решению задачи 10.4

Далее отметим, что $\angle BAD = \angle CDA = 2\angle CAD$, то есть AC — биссектриса угла BAD. Так как $\angle CAD = \angle ACB$ из параллельности, то треугольник ABC — равнобедренный. Значит, BC также равно a.

Мы получили, что треугольник BTC равносторонний, и его углы равны по 60°. Теперь нетрудно вычислить искомый угол:

$$\angle TCD = \angle BCD - \angle BCT = (180° - \angle ADC) - 60° = 120° - \angle ADC = 38°.$$ □

Задача 10.5. Целые числа a и b таковы, что у квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + 1100$ есть общий корень, являющийся простым числом. Найдите a. Укажите все возможные варианты.

Ответ: 40 и 274.

Решение. Пусть p — общий корень квадратных трёхчленов, являющийся простым числом. Тогда $p^2 + ap + b = 0$, из чего можно сделать вывод, что $b \mathrel{\vdots} p$.

Теперь взглянем на второй квадратный трёхчлен: $p^2 + bp + 1100 = 0$. Из того, что $b \mathrel{\vdots} p$, мы делаем вывод, что $1100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \mathrel{\vdots} p^2$, то есть $p = 2$ или $p = 5$.

В любом случае, b можно выразить из равенства $p^2 + bp + 1100 = 0$ (получив -552 и -225 соответственно); далее аналогично выражается a из равенства $p^2 + ap + b = 0$ — получается 274 и 40 соответственно. □

Задача 10.6. На острове живут два племени: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды 80 человек сели за круглый стол, и каждый из них заявил: «Среди 11 человек, сидящих следом за мной по часовой стрелке, есть хотя бы 9 лжецов». Сколько рыцарей сидит за круглым столом? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 20.

Решение. Сначала докажем, что среди 12 подряд идущих людей не более 3 рыцарей. Предположим, что это не так. Рассмотрим самого первого рыцаря из этой группы. Среди 11 человек, сидящих следом за ним по часовой стрелке, есть хотя бы 3 рыцаря, что противоречит условию задачи.

Далее предположим, что найдутся 4 подряд идущих лжеца. Пронумеруем всех людей по часовой стрелке от 1 до 80 так, чтобы эти лжецы имели номера от 1 до 4.

Посмотрим на первого лжеца. Из его слов следует, что среди людей с номерами от 2 до 12 есть хотя бы 3 рыцаря, но из доказанного выше мы знаем, что там не более 3 рыцарей. Так как первые трое из них точно лжецы, то среди людей с номерами от 5 до 12 ровно 3 рыцаря.

Теперь посмотрим на группу людей с номерами от 5 до 16. Среди них не более 3 рыцарей, но при этом среди людей с номерами от 5 до 12 ровно 3 рыцаря. Тогда люди с номерами от 13 до 16 — лжецы. Таким образом мы нашли новую четвёрку подряд идущих лжецов, сдвинутую по сравнению с исходной на 12 человек по часовой стрелке.

Продолжая аналогичные рассуждения для новой четвёрки подряд идущих лжецов, мы получим ещё одну такую же четвёрку, потом ещё одну и т. д. В итоге, так как НОД чисел 80 и 12 равен 4, в такие четвёрки попадут все люди за столом. Но все они не могут быть лжецами, противоречие.

Значит, наше предположение было неверно, и в любой четвёрке подряд идущих людей есть хотя бы один рыцарь. Но мы знаем, что среди 12 подряд идущих людей не более 3 рыцарей. Таким образом, в любой четвёрке подряд идущих людей есть ровно один рыцарь, то есть за столом их ровно 20.

Осталось построить пример такой рассадки рыцарей и лжецов. Пусть все люди с номерами, кратными 4, — рыцари, а все остальные — лжецы. Нетрудно проверить, что этот пример удовлетворяет условию задачи. □

Другое решение. Назовём *печалью* некоторого человека количество лжецов среди 12 человек, включающих его самого и ещё 11 тех, кто сидит подряд за ним по часовой стрелке. По условию печаль каждого рыцаря не меньше 9, а печаль каждого лжеца не больше 9. Докажем, что на самом деле печаль всех людей равна 9.

Для этого сразу заметим, что печаль соседних людей не может отличаться более чем на 1. Действительно, при переходе к следующему по часовой стрелке человеку из «его» множества из 12 человек убирается один и добавляется тоже один. Значит, количество лжецов может уменьшиться не более чем на 1 и увеличиться не более чем на 1.

Теперь предположим, что у некоторого рыцаря печаль больше 9. Тогда у следующего за ним человека печаль не меньше: из «его» множества из 12 человек убыл этот рыцарь, а добавился неизвестный, т. е. количество лжецов не уменьшилось. Значит, за таким рыцарем не может следовать лжец, и мы нашли ещё одного рыцаря с печалью больше 9. Ясно, что мы можем продолжать так идти по кругу, и придём к противоречию: все за столом рыцарями быть не могут.

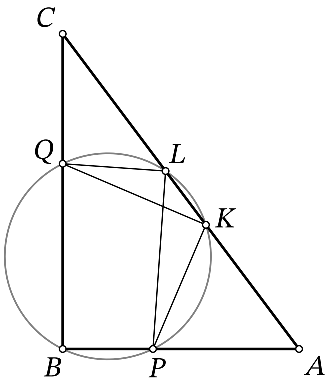
Совершенно аналогично доказывается, что у лжеца не может быть печаль меньше 9. Действительно, у следующего за таким лжецом человека печаль не может быть больше, чем у лжеца; значит, это тоже должен быть лжец с печалью меньше 9; продолжая так и далее, приходим к тому, что все за столом — лжецы, что также невозможно.

Теперь ясно, что количество лжецов среди произвольных 12 подряд идущих людей равно печали первого из них, то есть 9. Отсюда легко понять, что два человека на расстоянии 12 (то есть между которыми 11 других людей) имеют одинаковый тип (рыцарь или лжец), так как если любого из них прибавить к 11 промежуточным людям, в сумме должно оказаться 9 лжецов. Это означает, что последовательность рыцарей-лжецов периодична с периодом 12; но так как НОД 80 и 12 равен 4, то она периодична и с периодом 4.

Разбив весь стол на одинаковые четвёрки, легко видеть, что в каждой из них по 3 лжеца (иначе в группе из трёх соседних четвёрок не получится 9). Тогда в них по одному рыцарю, а значит, всего рыцарей 20.

Периодическая рассадка рыцарей через три лжеца, как легко проверить, удовлетворяет условию. □

Задача 10.7. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 42$ и $BC = 56$. Окружность, проходящая через точку B, пересекает сторону AB в точке P, сторону BC — в точке Q, а сторону AC — в точках K и L. Известно, что $PK = KQ$ и $QL : PL = 3 : 4$. Найдите PQ^2.



Ответ: 1250.

Решение. Поскольку во вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то $\angle PKL = \angle PLQ = 90°$. Из условия также следует, что прямоугольные треугольники ABC и QLP подобны (рис. 6). Из этого подобия и вписанности пятиугольника

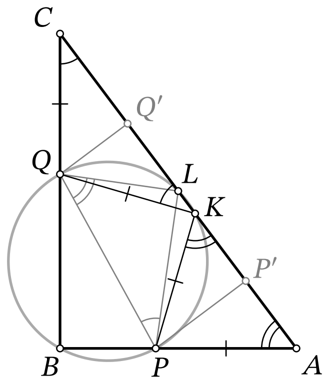


Рис. 6: к решению задачи 10.7

$BQLKP$ получаем, что $\angle C = \angle QPL = \angle QKL$, поэтому треугольник CQK является равнобедренным и $CQ = QK$. Аналогично $\angle A = \angle PQL = 180° - \angle PKL = \angle AKP$, поэтому $AP = PK$. Также по условию $PK = KQ$.

Итак, $CQ = QK = PK = AP = x$. Из условия следует, что

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{14^2(3^2 + 4^2)} = 14 \cdot 5 = 70\,,$$

а также $\cos A = \frac{3}{5}$ и $\cos C = \frac{4}{5}$. Опустим перпендикуляры PP' и QQ' на гипотенузу AC. Тогда

$$70 = AC = AK + KC = 2AP' + 2CQ' = 2x\cos A + 2x\cos C = 2x\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{14}{5}x\,,$$

откуда $x = 25$. По теореме Пифагора в треугольнике PKQ получаем

$$PQ^2 = PK^2 + QK^2 = 25^2 + 25^2 = 1250\,. \qquad \square$$

Другое решение. Как и в прошлом решении, по теореме Пифагора находим $AC = 70$. Также из подобия и вписанности получаем $\angle C = \angle QPL = \angle QBL$, поэтому треугольник CLB является равнобедренным и $CL = LB$. Аналогично $\angle A = \angle PQL = \angle PBL$, поэтому $AL = BL = CL$, т. е. L — середина гипотенузы.

Точка K равноудалена от точек P и Q, т. е. она является серединой дуги PLQ данной окружности и лежит на биссектрисе угла B. Тогда по свойству биссектрисы получаем $AK : KC = AB : BC = 3 : 4$, что даёт нам $AK = \frac{3}{7}AC = 30$ и $CK = \frac{4}{7}AC = 40$. Из свойств секущих к окружности, проведённых из одной точки, получаем $AK \cdot AL = AB \cdot AP$ и $CK \cdot CL = CQ \cdot CB$, откуда соответственно

$$AP = \frac{AK \cdot AL}{AB} = \frac{30 \cdot 35}{42} = 25 \quad \text{и} \quad CQ = \frac{CK \cdot CL}{CB} = \frac{40 \cdot 35}{56} = 25\,.$$

Тогда $BP = AB - AP = 17$ и $BQ = BC - CQ = 31$, из чего по теореме Пифагора в треугольнике PBQ получаем $PQ^2 = PB^2 + BQ^2 = 17^2 + 31^2 = 1250$. $\square$

Задача 10.8. Два разбойника украли 300 золотых монет. Они решили поделить их следующим образом: первый разбойник кладёт в мешочек несколько монет (возможно, все), а второй разбойник выбирает, кому этот мешочек достанется; затем это действие повторяется ещё несколько раз. Делёж заканчивается, когда

- либо все деньги кончились,
- либо кому-нибудь досталось 11 мешочков — в этом случае все остальные деньги сразу же достаются другому разбойнику.

Какое наибольшее количество монет может гарантированно получить первый разбойник?

Ответ: 146.

Решение. Сначала покажем, что первый разбойник сможет получить хотя бы 146 монет. Его стратегия будет состоять в том, чтобы класть в мешочки по 14 монет. Во-первых, заметим, что он всегда сможет это делать: так как $21 \cdot 14 = 294$, то он так сделает хотя бы 21 ход, и когда монеты начнут заканчиваться, процесс наверняка уже завершится (одному из разбойников достанется 11 мешочков).

Разберём, как именно может завершиться игра. Если у первого разбойника накопилось 11 мешочков, то это уже 154 монеты. В ином случае у второго разбойника, наоборот, не более 11 мешочков, то есть не более 154 монет. Значит, остальные монеты у первого, то есть не менее 146.

Теперь покажем, как второму разбойнику гарантировать себе 154 монеты. Его стратегия следующая: мешочки с 14 монетами и более забирать себе, а с 13 монетами и менее — отдавать первому.

Аналогично разберём, как может закончиться игра. Если второй разбойник закончит её с 11 мешочками, то у него уже не менее 154 монет. В ином случае первый разбойник закончит с не более чем 11 мешочками, что составит не более $11 \cdot 13 = 143$ монет. Тогда у второго останется не менее 157 монет. $\square$

Замечание. Укажем, как получить ответ в общем случае. Пусть всего монет N, а мешочков каждому разбойнику может достаться не более k ($N \geqslant 2k$). Разобьём монеты на $2k$ *почти равных* групп, то есть чтобы либо во всех группах было поровну монет (при $N \vdots 2k$), либо количества монет в группах отличались не более чем на 1 (такое разбиение единственно). Группы упорядочим по возрастанию. Рассуждением, аналогичным приведённому выше, можно показать, что первый разбойник может гарантировать себе сумму k меньших групп разбиения, а второй — сумму k бóльших.

11 класс

Задача 11.1. Учитель написал на доске двузначное число. Каждый из троих ребят сказал по два утверждения.

- Андрей: «это число заканчивается на цифру 6» и «это число делится на 7».
- Боря: «это число больше 26» и «это число заканчивается на цифру 8».
- Саша: «это число делится на 13» и «это число меньше 27».

Известно, что каждый из мальчиков один раз сказал правду и один раз ошибся. Какое число могло быть написано на доске? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 91.

Решение. Рассмотрим высказывания Саши. Если верно его второе высказывание о том, что число меньше 27, то первое высказывание Бори точно неверно, поэтому число должно заканчиваться на 8. Двузначное число с такими условиями единственно — это 18 — но тогда ни одно высказывание Андрея не верно. Противоречие.

Значит, верно первое высказывание Саши о том, что число делится на 13; тогда неверно его второе высказывание, и число не меньше 27. Но в этом случае верно первое высказывание Бори о том, что число больше 26, и неверно его второе высказывание о том, что число заканчивается на 8. Среди двузначных чисел, делящихся на 13, больших 26 и не заканчивающихся на 8, подходит только число 91 (числа 39, 52, 65 не подходят потому, что оба высказывания Андрея были бы неверны). □

Задача 11.2. У Веры есть набор различных по массе гирь, каждая из которых весит целое число грамм. Известно, что самая лёгкая гиря набора весит в 71 раз меньше, чем все остальные гири вместе взятые. Также известно, что две самые лёгкие гири набора вместе весят в 34 раза меньше, чем все остальные гири вместе взятые. Какое наименьшее число грамм может весить самая лёгкая гиря?

Ответ: 35.

Решение. Все веса в решении выражаются в граммах.

Пусть самая лёгкая гиря весит m, тогда остальные гири весят $71m$, а общий суммарный вес равен $72m$. Пусть также две самые лёгкие гири суммарно весят n, тогда остальные гири весят $34n$, а общий суммарный вес равен $35n$, что делится на 35. Следовательно, $72m$ делится на 35, т. е. m делится на 35, так как 72 и 35 взаимно просты.

Итак, $m \geqslant 35$. Приведём теперь пример возможного набора гирь, в котором $m = 35$. Для набора гирь с различными весами 35, 37, 48, 2400 все условия выполняются: $35 \cdot 71 = 2485 = 37 + 48 + 2400$, $(35 + 37) \cdot 34 = 2448 = 48 + 2400$. □

Задача 11.3. На координатной плоскости отметили все точки (x, y) такие, что x и y — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $0 \leqslant y \leqslant 26$. Сколько существует прямых, проходящих ровно через 3 отмеченные точки?

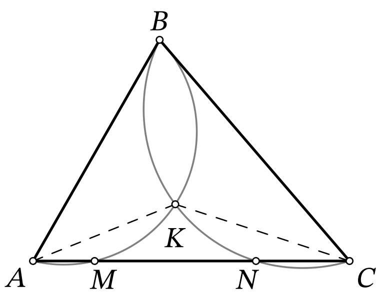
Ответ: 365.

Решение. Все отмеченные точки располагаются на трёх вертикальных прямых $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Назовём эти прямые левой, средней, правой соответственно.

Рассмотрим какие-нибудь три отмеченные точки, лежащие на одной прямой. Если хотя бы две из них лежат на вертикальной прямой, то отмеченных точек на такой прямой больше 3, что нам не подходит. Значит, на каждой из трёх вертикальных прямых должно быть выбрано ровно по одной точке.

Заметим, что при выборе точки $A(0, a)$ на левой прямой и точки $B(2, b)$ на правой прямой точка на средней прямой определяется однозначно — это середина отрезка AB, и она имеет координаты $(1, \frac{a+b}{2})$. Она имеет целые координаты тогда и только тогда, когда числа a и b имеют одинаковую чётность. Следовательно, количество искомых прямых ровно через 3 отмеченные точки равно количеству пар (a, b), для которых a и b — целые числа одной чётности от 0 до 26 включительно (ясно, что каждой тройке целых чисел $(a, \frac{a+b}{2}, b)$ соответствует своя прямая, содержащая ровно три отмеченных точки). На отрезке $[0; 26]$ всего 14 чётных и 13 нечётных чисел, поэтому ответом в задаче является число $14 \cdot 14 + 13 \cdot 13 = 365$. □

Задача 11.4. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки M и N (M лежит на отрезке AN). Известно, что $AB = AN$, $BC = MC$. Описанные окружности треугольников ABM и CBN пересекаются в точках B и K. Сколько градусов составляет угол AKC, если $\angle ABC = 68°$?



Ответ: 124.

Решение. Из данного нам в задаче следует, что $68° + \alpha + \gamma = 180°$, где за α и γ обозначены величины углов треугольника A и C соответственно. Так как треугольник BAN равнобедренный, то $\angle BNA = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, то есть $\angle BNC = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. Аналогично $\angle BMA = 90° + \frac{1}{2}\gamma$.

Из того, что эти углы вписаны в соответствующие окружности, получаем $\angle BKA = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ и $\angle BKC = 90° + \frac{1}{2}\gamma$ (рис. 7). Остаётся

$$\angle AKC = 360° - \angle BKA - \angle BKC = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 90° + \frac{1}{2} \cdot 68° = 124° . \qquad \square$$

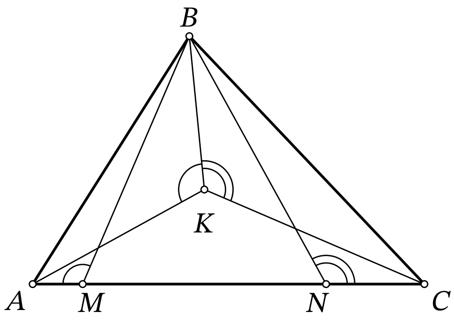


Рис. 7: к решению задачи 11.4

Замечание. Точка K является центром вписанной окружности треугольника ABC.

Задача 11.5. В шахматном турнире соревнуются друг с другом команда школьников и команда студентов, в каждой из которых по 15 человек. В течение турнира каждый школьник должен сыграть с каждым студентом ровно один раз, причём каждый день каждый человек должен играть не более одного раза. В разные дни могло проводиться разное количество игр.

В некоторый момент турнира организатор заметил, что может составить расписание на следующий день из 15 игр ровно 1 способом, а из 1 игры — N способами (порядок игр в расписании не важен, важно лишь кто с кем играет). Найдите наибольшее возможное значение N.

Ответ: 120.

Решение. Заметим, что N — общее количество игр, которое осталось сыграть в турнире.

Опишем пример, в котором $N = 120$. Пронумеруем студентов и школьников числами от 1 до 15. Пусть школьнику с номером k надо сыграть со студентами с номерами от 1 до k. Тогда всего осталось сыграть

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 15 = 120$$

игр. Нетрудно проверить, что существует ровно один способ поставить 15 игр на один день (первый школьник обязан играть с первым студентом, второй — со вторым, третий — с третьим, ..., пятнадцатый — с пятнадцатым).

Теперь докажем, что $N \leqslant 120$. Не умаляя общности, будем считать, что единственный способ сыграть 15 игр — это когда первый школьник играет с первым студентом, второй школьник — со вторым студентом, ..., пятнадцатый школьник с пятнадцатым студентом. Эти 15 пар назовём *прямыми,* а пары игроков с разными номерами — *перекрёстными.*

Заметим, что у нас не может возникнуть ситуации, когда k-й школьник должен сыграть с m-м студентом, а m-й школьник должен сыграть с k-м студентом (иначе есть ещё один способ сыграть 15 игр). Таким образом, для каждой пары номеров k и m запланировано не более одной перекрёстной игры. Всего перекрёстных игр тогда запланировано не более, чем $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$. Прибавляя сюда прямые игры, получаем не более 120. $\square$

Задача 11.6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle C = 57°$, $\sin\angle A + \sin\angle B = \sqrt{2}$ и $\cos\angle A + \cos\angle B = 2 - \sqrt{2}$. Сколько градусов составляет угол D?

Ответ: 168.

Решение. Преобразуем данные нам суммы тригонометрических функций:

$$\sqrt{2} = \sin\angle A + \sin\angle B = 2\sin\left(\frac{\angle A + \angle B}{2}\right)\cos\left(\frac{\angle A - \angle B}{2}\right),$$
$$2 - \sqrt{2} = \cos\angle A + \cos\angle B = 2\cos\left(\frac{\angle A + \angle B}{2}\right)\cos\left(\frac{\angle A - \angle B}{2}\right).$$

Поскольку оба выражения не равны 0, поделим первое на второе и сократим общий множитель $\cos(\frac{\angle A - \angle B}{2})$, не равный 0. Получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\angle A + \angle B}{2}\right),$$

откуда нетрудно извлечь $\operatorname{tg}(\frac{\angle A + \angle B}{2}) = \sqrt{2} + 1$, избавившись от иррациональности в знаменателе.

Применяя формулу тангенса двойного угла $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, получаем

$$\operatorname{tg}(\angle A + \angle B) = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{1 - (\sqrt{2} + 1)^2} = \frac{2\sqrt{2} + 2)}{-2\sqrt{2} - 2} = -1,$$

т. е. $\angle A + \angle B = 180° \cdot k - 45°$ для некоторого целого k.

Углы $\angle A$ и $\angle B$ меньше 180°, ведь четырёхугольник выпуклый; а так как сумма их косинусов положительна, то они не могут быть оба тупыми. Значит, $\angle A + \angle B < 270°$, что оставляет единственное решение $\angle A + \angle B = 135°$. Тогда угол D равен $360° - 57° - 135° = 168°$. $\square$

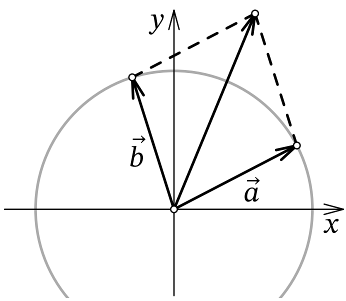


Рис. 8: к замечанию в решении задачи 11.6

Замечание. Рассмотрим вектора $\vec{a} = (\cos\angle A, \sin\angle A)$ и $\vec{b} = (\cos\angle B, \sin\angle B)$ (рис. 8) и их сумму, по условию равную $(2-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Если нарисовать отвечающий этой сумме параллелограмм, то он окажется ромбом, а его диагональ — биссектрисой между $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это даёт геометрическое объяснение того, что угол между осью абсцисс и вектором $\vec{a}+\vec{b}$ равен $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$, почему при делении одной координаты вектора на другую мы в решении и получили $\operatorname{tg}(\frac{\angle A+\angle B}{2})$.

Задача 11.7. Натуральные числа a и b таковы, что a^a делится на b^b, однако a не делится на b. Найдите наименьшее возможное значение числа $a+b$, если известно, что число b взаимно просто с 210.

Ответ: 374.

Решение. Очевидно, $b \neq 1$. Пусть p — простой делитель числа b; тогда $p \geqslant 11$, так как b взаимно просто с $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поскольку a^a делится на b^b, что делится на p, то и a делится на p. Отсюда, в частности, сразу следует, что число b не является простым.

Докажем, что $a+b \geqslant 253+121 = 374$. Если b представляется в виде произведения хотя бы трёх простых множителей (не обязательно различных), то оно не меньше $11^3 > 374$, тогда и $a+b$ больше 374. Пусть теперь b представимо в виде ровно двух простых множителей. Если $b = qr$ для различных простых чисел q и r, то по доказанному выше a делится и на q, и на r, но тогда оно делится и на b, что невозможно.

Осталось разобрать случай, когда $b = s^2$ для некоторого простого $s \geqslant 11$. Число a делится на s; пусть $a = sk$ для некоторого натурального k. Число k взаимно просто с s, поскольку a не делится на b.

Так как $a^a = (sk)^{sk} = s^{sk} \cdot k^{sk}$ делится на $b^b = (s^2)^{s^2} = s^{2s^2}$, то s^{sk} делится на s^{2s^2}, т. е. $sk \geqslant 2s^2$, и $k \geqslant 2s$. Число k взаимно просто с s, поэтому оно не равно $2s$, т. е. $k \geqslant 2s+1$.

Тогда $a+b = sk+s^2 \geqslant s(2s+1)+s^2 \geqslant 11 \cdot 23 + 11^2 = 253+121 = 374$.

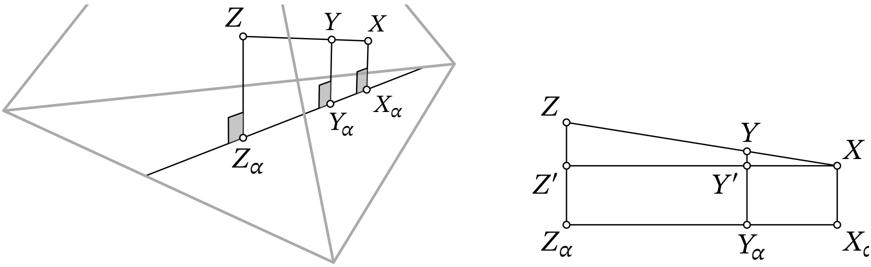
Легко убедиться в том, что для $a = 253 = 11 \cdot 23$ и $b = 121 = 11^2$ все условия выполняются: $a^a = 11^{253} \cdot 23^{253}$ делится на $b^b = 11^{242}$, a не делится на b, а число b взаимно просто с 210. $\square$

Задача 11.8. Внутри тетраэдра $ABCD$ даны точки X и Y. Расстояния от точки X до граней ABC, ABD, ACD, BCD равны 14, 11, 29, 8 соответственно. А расстояния от точки Y до граней ABC, ABD, ACD, BCD равны 15, 13, 25, 11 соответственно. Найдите радиус вписанной сферы тетраэдра $ABCD$.

Ответ: 17.

Решение. Рассмотрим точку Z, лежащую на луче XY, такую, что $XY : YZ = 1 : 2$. Докажем, что она и является центром вписанной сферы тетраэдра.

Опустим из точек X, Y, Z перпендикуляры X_α, Y_α, Z_α на эту плоскость — очевидно, они будут лежать в одной плоскости, перпендикулярной α (рис. 9a). Также проведём через X



(a) тетраэдр (b) сечение $XYY_\alpha X_\alpha$

Рис. 9: к решению задачи 11.8

прямую, паралелльную $X_\alpha Y_\alpha$, и её пересечения с прямыми YY_α и ZZ_α обозначим соответственно за Y' и Z' (рис. 9b).

Так как треугольники XYY' и XZZ' подобны с коэффициентом 3, а $Z'Z_\alpha = Y'Y_\alpha = XX_\alpha$, то $ZZ_\alpha = XX_\alpha + 3(YY_\alpha - XX_\alpha) = 3YY_\alpha - 2XX_\alpha$. (При этом разность $YY_\alpha - XX_\alpha$ может оказаться как положительна, как на рисунке, так и отрицательна.)

Получаем, что расстояния от Z до граней ABC, ABD, ACD, BCD равны соответственно $3 \cdot 15 - 2 \cdot 14 = 17$, $3 \cdot 13 - 2 \cdot 11 = 17$, $3 \cdot 25 - 2 \cdot 29 = 17$, $3 \cdot 11 - 2 \cdot 8 = 17$. Кроме того, ясно, что точка Z оказалась с той же стороны от каждой грани, что и точки X и Y (иначе формула дала бы нам отрицательное значение расстояния), а значит, она также лежит внутри тетраэдра.

Точка внутри тетраэдра, расстояния от которой до его граней равны, единственна — это центр вписанной сферы. Радиус сферы как раз равен расстоянию от центра до граней, то есть 17. $\square$