10 класс (решения)

Задача 10.1. Наименьший делитель числа, отличный от 1, будем называть *минимальным*. Наибольший делитель числа, отличный от самого числа, будем называть *максимальным*. Найдите четырёхзначное число, у которого максимальный делитель в 49 раз больше минимального. Достаточно привести пример одного такого числа.

Ответ: 1225 или 2401.

Решение. Отметим, что любому делителю d числа n соответствует делитель n/d, причём чем меньше d, тем больше n/d, и это взаимно-однозначное соответствие делителей с собой.

Пусть n — наше четырёхзначное число, а p — его минимальный делитель. Тогда максимальный делитель числа n равен n/p. Кроме этого, нетрудно понять, что p — простое число (иначе у n найдётся делитель меньше p, но больше 1).

Запишем условие задачи:

$$\frac{n}{p} : p = 49\,.$$

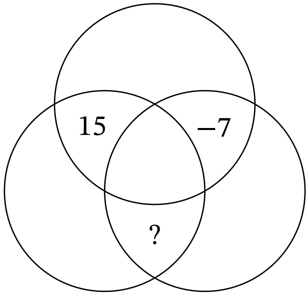
Умножая на знаменатели, получаем $n = 49p^2$. Это означает, что n делится на 7, а тогда p — простое число, не превосходящее 7.

Есть четыре простых числа, не превосходящих 7, — это 2, 3, 5 и 7; но n будет четырёхзначным только при p равном 5 или 7. □

Задача 10.2. На листе бумаги нарисованы три пересекающиеся окружности, они образуют 7 областей. Будем называть две области *соседними*, если у них есть общая граница. Области, граничащие ровно по одной точке, не являются соседними.

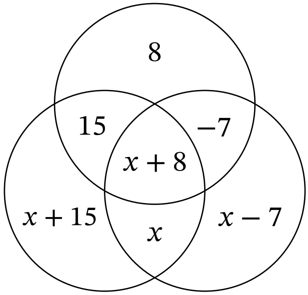
В две области уже вписаны числа. Впишите в оставшиеся 5 областей целые числа так, чтобы в каждой области число равнялось сумме всех чисел в соседних областях.

Какое число должно стоять вместо знака вопроса?



Ответ: -8.

Решение. Обозначим искомое число за x. Тогда можно расставить числа и в остальных областях:



Сумма чисел в областях, окружающих x, должна быть равна x. Запишем это:

$$(x+15)+(x+8)+(x-7)=x\,.$$

Решая уравнение, получаем $x=-8$. Нетрудно проверить, что и для остальных областей условие задачи будет выполнено. □

Задача 10.3. Петя и Даниил играют в следующую игру. У Пети есть 36 конфет. Он выкладывает эти конфеты в клетки квадрата 3×3 (некоторые клетки могут остаться пустыми). После этого Даниил выбирает четыре клетки, образующие квадрат 2×2, и забирает оттуда все конфеты. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно забрать Даниил?

Ответ: 9.

Решение. Если Петя положит в угловые клетки по 9 конфет (а в остальные клетки не положит конфеты вовсе), то в любом квадрате 2×2 будет ровно 9 конфет. После этого Даниил сможет забрать только 9 конфет.

Докажем, что Даниил сможет получить хотя бы 9 конфет. Предположим противное: пусть он может забрать не более 8 конфет при любом выборе квадрата 2×2. Пусть он тогда последовательно возьмёт конфеты из *всех* четырёх квадратов 2×2: сначала из одного (не более 8 конфет), потом оставшиеся конфеты из следующего квадрата (тоже не более 8), потом из третьего квадрата, и потом из четвёртого. На каждом шаге он мог взять не более 8 конфет, так что всего он заберёт не более 32. Но их должно быть 36. Противоречие. □

Задача 10.4. Рома загадал натуральное число, сумма цифр которого делится на 8. Затем прибавил к загаданному числу 2 и снова получил число, сумма цифр которого делится на 8. Найдите наименьшее число, которое мог загадать Рома.

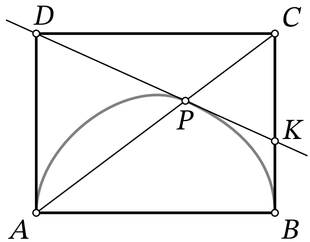
Ответ: 699.

Решение. Если оба числа делятся на 8, то и их разность делится на 8. Если при прибавлении не было перехода через десяток, то сумма цифр отличалась бы на 2, что не делится на 8. Если был переход через десяток, но не было перехода через сотни, то сумма цифр отличалась бы на $9-2=7$, что также не делится на 8. А если был переход через сотни и не было перехода через тысячи, то сумма цифр изменилась бы на $2\cdot 9-2=16$, что уже делится на 8.

Чтобы был переход через сотни при прибавлении двойки, последние две цифры должны быть 98 или 99. Теперь найдём в каждом из случаев минимальное число с суммой цифр, кратной 8. Это числа 798 и 699; понятно, что 699 меньше (и оно, очевидно, подходит под условие).

Осталось заметить, что если бы при прибавлении 2 происходил переход через разряд тысяч или более, то исходное число было бы не меньше 998, а найденное число уже меньше. □

Задача 10.5. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ как на диаметре построена окружность ω. Пусть P — вторая точка пересечения отрезка AC и окружности ω. Касательная к ω в точке P пересекает отрезок BC в точке K и проходит через точку D. Найдите AD, если известно, что $KD=36$.



Ответ: 24.

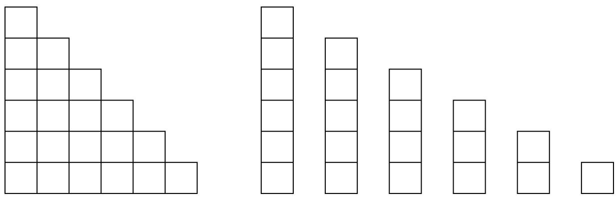
Решение. Заметим, что треугольники ADP и CKP подобны (равенства $\angle DAP=\angle KCP$ и $\angle ADP=\angle CKP$ обеспечиваются параллельностью $AD\parallel BC$). При этом треугольник

ADP равнобедренный, так как AD и DP — отрезки касательных. Тогда и треугольник CKP равнобедренный, то есть $CK = KP$.

С другой стороны, $KP = KB$, так как это тоже отрезки касательных. Получаем $KC = KB$, то есть K — середина стороны BC.

Тогда коэффициент подобия треугольников ADP и CKP равен отношению $AD : KC$, то есть 2. Тогда $PK = \frac{1}{2}PD$, откуда $AD = PD = \frac{2}{3}KD = 24$. □

Задача 10.6. Сколько существует способов разрезать лесенку высотой 6 клеток на 5 прямоугольников и один квадрат? Лесенка, все прямоугольники и квадрат изображены ниже. При разрезании прямоугольники могут располагаться горизонтально.



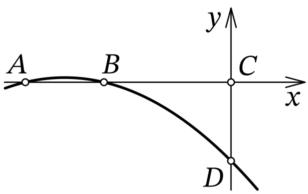
Ответ: 32.

Решение. Рассмотрим прямоугольник 1×6. Его можно положить двумя способами, и в любом из них остаётся лесенка высотой 5 клеток.

Далее рассмотрим прямоугольник 1×5. Его также можно положить двумя способами, и в любом из них остаётся лесенка высотой 4 клетки.

Делаем аналогично с прямоугольниками 1×4, 1×3 и 1×2 (квадрат 1×1 ставится в конце однозначно). На каждом шаге у нас был выбор из двух вариантов, значит, всего способов $2^5 = 32$. □

Задача 10.7. Никита схематично нарисовал график трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$. Оказалось, что $AB = CD = 1$. Рассмотрим четыре числа — a, b, c и дискриминант трёхчлена. Известно, что три из них равны в некотором порядке $1/4$, -1, $-3/2$. Найдите, чему равно четвёртое число.



Ответ: $-1/2$.

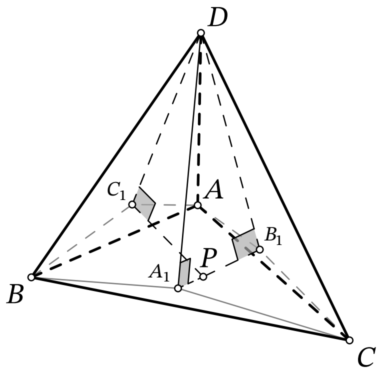
Решение. Из нарисованного графика следует, что a, b и c отрицательны. Действительно, a отрицательно, так как ветви параболы направлены вниз. Свободный член c отрицателен, так как он равен значению трёхчлена в $x = 0$. Наконец, b совпадает с угловым коэффициентом прямой $bx + c$, которая является касательной к графику трёхчлена в точке с абсциссой $x = 0$; нетрудно видеть, что этот коэффициент также отрицателен. (Альтернативно, можно заметить, что абсцисса вершины параболы отрицательна, а она равна $-\frac{b}{2a}$, что определяет знак b.)

Так как среди данных нам трёх чисел одно положительно, то это может быть лишь дискриминант $d = 1/4$. Рассмотрим расстояние AB между корнями трёхчлена. По условию, оно равно 1. С другой стороны, вычтя формулы корней квадратного трёхчлена друг из друга, можно выразить это расстояние через a и d:

$$1 = AB = \frac{\sqrt{d}}{|a|} = \frac{1}{2|a|}\,.$$

Получаем $|a| = 1/2$, то есть $a = -1/2$. Этого числа в списке не было, значит, это и есть ответ. □

Задача 10.8. На грани ABC тетраэдра $ABCD$ отметили точку P. Точки A_1, B_1, C_1 — проекции точки P на грани BCD, ACD, ABD соответственно. Оказалось, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Найдите $\angle BA_1C$, если известно, что $\angle BC_1D = 136°$, $\angle CB_1D = 109°$.



Ответ: 115.

Решение. Рассмотрим треугольники DPA_1 и DPC_1. Они равны по катету ($PC_1 = PA_1$) и гипотенузе (общая PD). Отсюда получаем, что $DC_1 = DA_1$.

Рассматривая треугольники BPC_1 и BPA_1, аналогично получим $BC_1 = BA_1$. Тогда треугольники BDC_1 и BA_1D равны по трём сторонам, а значит, $\angle BC_1D = \angle BA_1D$.

Аналогично можно получить $\angle CB_1D = \angle CA_1D$. Теперь ясно, что искомый угол вычисляется как

$$\angle BA_1C = 360^\circ - \angle BA_1D - \angle CA_1D = 360^\circ - \angle BC_1D - \angle CB_1D = 115^\circ\,. \qquad \square$$

Замечание. Если провести сферу с центром в точке P и радиусом PA_1, то она будет касаться граней DAB, DBC, DCA. Тогда равенства отрезков, например, $DC_1 = DA_1 = DB_1$, будут следовать из равенства отрезков касательных к сфере.