Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Региональный этап

2020/2021 год

Конкурс: **9 класс**

Второй тур. Задачи. **Решения**.

Продолжительность работы — **140 минут**.

Максимальное количество баллов за задачи — **120**.
Каждая задача оценивается из **30 баллов**.

Уважаемые коллеги!

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2021 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

При проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике и приведенных в данном документе, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2020/2021 учебном году» (раздел 5). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Для проверки задач члены жюри делятся на рабочие группы, каждая группа проверяет конкретную задачу, один из членов рабочей группы назначается ее руководителем. Такое разделение труда (при котором отдельные члены жюри проверяют конкретные задачи, а не работы целиком) способствует одинаковому уровню требований к решениям, облегчает разрешение спорных случаев. Состав рабочих групп утверждается председателем жюри или его заместителем. В случае если некоторые рабочие группы завершают проверку своих задач раньше других, их участники могут присоединиться к другим рабочим группам.
2. При наличии возможности желательно организовать проверку каждой задачи в каждой работе не менее чем двумя членами жюри.
3. Жюри проверяет работы в соответствии со схемами проверки, разработанными ЦПМК. В случае наличия в работе участника фрагмента решения, который не может быть оценен в соответствии со схемой проверки, жюри принимает решение исходя из своих представлений о справедливом оценивании, при возможности консультируясь с составителями заданий. Выполнение данного требования имеет исключительную важность, поскольку по итогам регионального

этапа составляется единый рейтинг школьников по России, на основании которого определяется состав участников заключительного этапа.

4. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).
5. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена. Если невозможно однозначно определить, хотел ли участник, чтобы фрагмент решения был проверен, этот фрагмент не проверяется.
6. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
7. Все утверждения, содержащиеся в решении участника, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты, изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все необщеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником необщеизвестные факты, оценивается неполным баллом.
8. Участник может решать задачи любым корректным способом, жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах составителей). При этом недопустимо выставление баллов «за объем»: если участник написал большой текст, не содержащий продвижений в решении задачи, такой текст должен быть оценен в 0 баллов.
9. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
10. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как правило, приводит к существенному снижению оценки.
11. В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для до-

казательства его полноты и правильности, излагать необязательно.

12. Штрафы, которые жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от серьезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила получаемых выводов, штрафуется меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.
13. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) к другим пунктам или на общую часть решения, выписанную в начале.
14. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.
15. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для получения полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение некоторых случаев может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобранных случаев в общем их числе).
16. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики и подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения — в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из своего опыта и справедливости. В спорных случаях пишите нам. Если ЦПМК захочет дать комментарии по проверке отдельных заданий (например, ответить на часто задаваемые вопросы), она сделает это на странице **http://ILoveEconomics.ru/olimp/region/grading**. Если ЦПМК посчитает нужным пояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов рекомендуется следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую: cpmk@iloveeconomics.ru.

Ваша ЦПМК

Для справки. Критерии выполнения заданий олимпиады. В таблице приведено количество баллов, при котором задание считается выполненным. Эти сведения нужны для подсчета статистики результатов олимпиады; на индивидуальные результаты участников не влияют.

Номер задания	Баллы
1	2
2	6
3	10
4	14
5	12
6	12
7	12
8	12

Задание 5. *Шок на рынке масок (9 класс)* *(30 баллов)*

Рынок медицинских масок в стране А совершенно конкурентный. В 2019 году недельный рыночный спрос задавался уравнением $Q_d = 55 - P$ (объем — в тыс. шт. в неделю), а недельное рыночное предложение — уравнением $Q_s = P - 11$; на рынке действовало 10 одинаковых фирм.

В 2020 году в связи с пандемией недельный спрос на маски резко вырос (сдвинувшись параллельно). В первые месяцы пандемии число фирм, производящих маски, оставалось тем же, что и в 2019 году, и цена на маски выросла в 4 раза. Во второй половине 2020 года на рынок вошли новые фирмы (использующие ту же технологию производства, что и старые фирмы), и цена опустилась до уровня 2019 года.

а) *(10 баллов)* Определите уравнение недельного спроса в 2020 году.

б) *(12 баллов)* Определите число фирм, вошедших на рынок в 2020 году.

в) *(8 баллов)* Если после окончания пандемии спрос на маски вернется к уровню 2019 года, а число фирм останется тем же, что и в 2020 году, какой будет цена на маски?

Решение

а) В 2019 году выполнялось $55 - P = P - 11$, откуда $P_{19} = 33$ и $Q_{19} = 22$. Значит, в первом полугодии 2020 года цена составила $P_{20} = 4 \cdot 33 = 132$; тогда недельное количество можно найти из не изменившегося предложения: $Q_{20} = P_{20} - 11 = 121$. Если спрос сдвинулся параллельно (т.е. при каждой цене вырос на одну и ту же величину), это значит, что по сравнению с функцией для 2019 года наклон остался единичным, а константа изменилась: $Q_d = a - P$. Зная параметры нового равновесия, составим уравнение $121 = a - 132$, откуда $a = 253$. Итак, спрос в 2020 году имеет вид $Q_d = 253 - P$.

б) Во втором полугодии 2020 года цена составила $P_{20} = P_{19} = 33$, значит, равновесное количество составило $Q_{20} = 253 - P_{20} = 220$. Если $Q_s = P - 11$ — это предложение 10 идентичных фирм, то индивидуальное предложение фирмы задаётся как $q_s = 0{,}1(P - 11)$; при цене 33 д.е. получаем, что каждая фирма производит по $q_s = 2{,}2$, а значит всего на рынке присутствуют $Q_{20}/q_s = 100$ фирм, т.е. на рынок вошло 90 новых фирм.

в) Спрос снова примет вид $Q_d = 55 - P$, а рыночное предложение, возвращаясь к выкладкам пункта **б)**, останется равным $Q_s = 100q_s = 100 \cdot 0{,}1(P - 11) = 10P - 110$. В новом равновесии $55 - P = 10P - 110$, т.е. $P = 15$.

Примечание: Интересно, что после окончания пандемии цена на маски может оказаться ниже, чем до ее начала ($15 < 33$). Это происходит из-за того, что производственные мощности во время пандемии серьезно наращиваются. Однако можно предположить, что такая ситуация низкой цены после пандемии продлится недолго — с течением времени часть фирм уйдет с рынка, и цена вернется к уровню 2019 года.

Схема проверки

а) Всего за пункт — **10 баллов**.

- Найдены равновесные количество масок и цена в 2019 г. — **2 балла**.
- Найдено равновесное количество масок в 2020 г. — **2 балла**.

- Записана через параметр функция спроса (или обратная функция) таким образом, чтобы сдвиг был параллельным (может быть не отдельная запись, а в ходе решения, например, в условии уравновешенности рынка) — **2 балла**.
- Найдено значение параметра (даже если не записан окончательный вид функции спроса) — **4 балла**.

б) Всего за пункт — **12 баллов**.

- Записана функция предложения одной фирмы — **4 балла**.
- Найден объем, который производит каждая фирма при первоначальной цене (и к которой рынок вернулся после появлении на рынке новых фирм) — **2 балла**.
- Найдено равновесное количество масок после выхода новых фирм на рынок — **2 балла**.
- Найдено общее количество фирм на рынке — **2 балла**.
- Указано количество фирм, вышедших на рынок (т.е. дан ответ на сформулированный в задании вопрос) — **2 балла**.

в) Всего за пункт — **8 баллов**.

- Записана функция предложения на рынке (совокупное предложение всех фирм) — **4 балла**.
- Условие уравновешенности рынка масок — **2 балла**.
- Найдена цена на маски — **2 балла**.

Задание 6. *Шарик-бизнесмен* *(30 баллов)*

Матроскин уехал в отпуск и решил оставить на Шарика производство творога. В Простоквашино Шарик является монополистом. Недельный спрос на творог задается функцией $Q = 48 - 2P$, где P — цена (в д.е./кг), Q — объем (в кг). Чтобы произвести Q кг творога, Шарику нужно потратить $t(Q) = Q^2/2$ часов (зависимость нелинейная, так как Шарик устает, и каждый следующий килограмм дается ему труднее). Помимо продажи творога Шарик может давать уроки фотоохоты по цене 2 д.е. в час (число часов урока может быть нецелым). В запасе у него есть 50 часов в неделю на выполнение обоих видов работ (остальное время он восстанавливает силы). Шарик максимизирует свой суммарный доход от двух видов деятельности.

а) *(9 баллов)* Найдите оптимальный для Шарика объем производства творога и максимальный суммарный доход Шарика.

б) *(11 баллов)* Почтальон Печкин предложил Шарику услугу привлечения клиентов с окрестных деревень, в результате которого спрос на творог вырастет до $Q = 72 - 2P$. Печкин просит за услугу 115 д.е. Какой объем производства следует выбрать Шарику, если он согласится на предложение Печкина? Стоит ли ему соглашаться?

в) *(10 баллов)* Допустим, Печкин за свои услуги просит не фиксированную сумму, а взять его в долю. А именно, Печкин просит, чтобы Шарик отдавал Печкину треть выручки от продажи творога. Какой объем производства следует выбрать Шарику, если он согласится? Стоит ли Шарику соглашаться?

Решение

а) Обратная функция спроса имеет вид $P = 24 - Q/2$; выручка Шарика от продажи творога равна $P \cdot Q = (24 - Q/2)Q$.

Выпишем общий доход Шарика: $R(Q, t_u) = (24 - Q/2)Q + 2 \cdot t_u$, где t_u — время, потраченное на уроки фотоохоты. Поскольку $t(Q) + t_u = 50$ и $t(Q) = Q^2/2$, функцию дохода можно записать как

$$R(Q) = (24 - Q/2)Q + 2(50 - Q^2/2) = 24Q - 3Q^2/2 + 100.$$

При этом $Q \in [0; 10]$, так как максимальный объем производства из-за ограничения на общее время равен $\sqrt{50 \cdot 2} = 10$.

Функция дохода является квадратичной, ветви параболы направлены вниз, и вершина находится в точке $Q = 24/(2 \cdot 3/2) = 8$. Поскольку $8 \in [0; 10]$, это и есть оптимальный выпуск.

Ответ: $Q^\star = 8$.

б) Если Шарик согласится, обратная функция спроса примет вид $P = 36 - Q/2$. Аналогично пункту **а)**, запишем доход Шарика

$$\pi = (36 - Q/2)Q + 2(50 - Q^2/2) = 36Q - 3Q^2/2 + 100.$$

Шарик максимизирует на отрезке $[0; 10]$. Вершина параболы в точке $Q = 36/3 = 12$. Вершина находится справа от допустимого отрезка, и поэтому оптимум достигается в правой границе отрезка, то есть при $Q^\star = 10$.

Рассчитаем прирост дохода Шарика, если он согласится. В пункте **а)** доход равен $R_0 = 24 \cdot 8 - 3 \cdot 8^2/2 + 100 = 3 \cdot 8^2 - 1{,}5 \cdot 8^2 + 100 = 196$. В **б)** получаем $R_1 = 36 \cdot 10 - 1{,}5 \cdot 10^2 + 100 = 360 - 150 + 100 = 310$.

Печкин просит 115, и при согласии Шарик получит нетто $210 - 115 = 195 < 196$. Значит, соглашаться не стоит.

Ответ: $Q^\star = 10$, нет.

в) При согласии Печкин будет брать 1/3 от выручки, то есть от величины $(36 - Q/2)Q$. Значит, функция дохода Шарика примет вид

$$(1 - 1/3) \cdot (36 - Q/2)Q + 100 - Q^2 = 24Q - 4Q^2/3 + 100.$$

Шарик максимизирует ее на отрезке $[0; 10]$. Вершина параболы в точке $Q = 24/(8/3) = 9$. Поскольку $9 \in [0; 10]$, эта точка и будет оптимумом. $Q^\star = 9$.

Доход Шарика (уже за вычетом платежа Печкину) равен $R_2 = 24 \cdot 9 - 4 \cdot 9^2/3 + 100 = 9 \cdot 3 \cdot 8 - 9 \cdot 3 \cdot 4 + 100 = 9 \cdot 3 \cdot 4 + 100 = 208$. Поскольку $208 > 196$, нужно соглашаться.

Ответ: $Q^\star = 9$, да.

Примечание: В каждом пункте можно было получить те же ответы, если максимизировать не общий доход, а *экономическую прибыль* от продажи творога, то есть выручку от продажи творога за вычетом экономических издержек. В задаче явные издержки производства творога равны нулю, а неявные издержки равны упущенной выгоде, то есть доходу от уроков, потерянному из-за производства творога. Тогда экономическая прибыль равна

$$\pi(Q) = TR(Q) - 2 \cdot t(Q),$$

где $TR(Q)$– выручка от продажи творога, в то время как суммарный доход равен

$$R = TR(Q) + 2(50 - t(Q)) = \pi(Q) + 100.$$

Таким образом, экономическая прибыль от продажи творога и суммарный доход отличаются лишь на константу, а значит, оптимальные выпуски при максимизации этих функций совпадают.

Схема проверки

Если участник максимизирует не суммарный доход, а экономическую прибыль от продажи творога, балл не снижается.

Под достаточными условиями максимума ниже понимается одно из: ветви параболы направлены вниз, первая производная меняет знак с плюса на минус, вторая производная отрицательна.

За каждую арифметическую ошибку снимается **1 балл** при правильной логике решения.

а) Всего за пункт **9 баллов**.

- Правильное составление функции дохода (или экономической прибыли)— **5 баллов**.

- Нахождение $Q = 8$ — **1 балл**.
- Проверка, того, что $Q = 8$ принадлежит допустимому отрезку $[0; 10]$ — **1 балл**.
- Проверка достаточных условий максимума — **1 балл**.
- Нахождение дохода — **1 балл**.

б) Всего за пункт **11 баллов**.

- Правильное составление функции дохода (или экономической прибыли) — **5 баллов**.
- Нахождение $Q = 12$ — **1 балл**.
- Проверка достаточных условий максимума — **1 балл**.
- Проверка, того, что $Q = 12$ не принадлежит допустимому отрезку $[0; 10]$ — **1 балл**.
- Определение оптимального выпуска $Q^\star = 10$ — **1 балл**.
- Нахождение дохода — **1 балл**.
- Сравнение двух величин и правильный вывод о том, соглашаться или нет, — **1 балл**.

в) Всего за пункт **10 баллов**.

- Правильное составление функции дохода (или экономической прибыли) — **5 баллов**.
- Нахождение $Q = 9$ — **1 балл**.
- Проверка достаточных условий максимума — **1 балл**.
- Проверка, того, что $Q = 9$ принадлежит допустимому отрезку $[0; 10]$ — **1 балл**.
- Нахождение дохода — **1 балл**.
- Сравнение двух величин и правильный вывод о том, соглашаться или нет, — **1 балл**.

Задание 7. *Повышенная ставка* *(30 баллов)*

Банки обычно предлагают не один тип вклада, а целую линейку вкладов с разными свойствами и ставками. Например, если вклад нельзя пополнять, то ставка по нему обычно выше. В этой задаче мы рассмотрим данную ситуацию.

Предположим, вам предлагается на выбор два вклада сроком 12 месяцев. Ставка по первому вкладу равна 1 % в месяц, и его можно пополнять на любую сумму с интервалом не менее месяца. Ставка по второму вкладу равна 1,5 % в месяц, но его нельзя пополнять. В данном банке проценты начисляются по методу *простых процентов*, то есть если некая сумма s лежит на вкладе t месяцев по ставке $(100r)$ % в месяц, то в конце срока по ней выплачиваются проценты в размере $t \cdot r \cdot s$.

а) *(10 баллов)* Допустим, у вас изначально есть сумма 500 тыс. рублей, которую вы готовы разместить на вкладе. Из зарплаты вы готовы сберегать 40 тыс. рублей каждый месяц. (Первая зарплата придет к вам через месяц после начала срока вклада.) Какой из двух вкладов выгоднее для вас, если вы хотите накопить как можно бо́льшую сумму к концу срока?

б) *(20 баллов)* Теперь предположим, что вы — менеджер банка, которому нужно спрогнозировать расходы банка на процентные выплаты. Для этого нужно предсказать, сколько людей выберет каждый из указанных выше типов вкладов. Пусть M — сумма, которую человек готов разместить на вкладе в начале срока, а X — сумма, которую он готов сберегать в каждом из последующих месяцев. Пусть $k = M/X$. С помощью маркетингового исследования вы выяснили, что k для разных людей принимает значения от 5 до 15; доли людей с разными значениями k приведены в таблице.

Интервал k	[5; 7]	(7; 9]	(9; 11]	(11; 13]	(13; 15]
Доля людей	10 %	20 %	30 %	30 %	10 %

Считайте, что если человеку безразлично, какой вклад открывать, то он открывает пополняемый. Какой процент людей выберет вклад с возможностью пополнения?

Решение

а) При пополняемом вкладе сумма к концу года составит

$$S_1 = 500 + 500 \cdot 12 \cdot 0{,}01 + 40 \cdot 12 + 40 \cdot 0{,}01 \cdot (11 + 10 + \ldots + 1 + 0) =$$
$$= 500 + 60 + 480 + 40 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} = 1040 + 0{,}4 \cdot 66 = 1066{,}4.$$

При непополняемом вкладе сумма к концу года составит

$$S_2 = 500 + 500 \cdot 12 \cdot 0{,}015 + 40 \cdot 12 = 500 + 5 \cdot 12 \cdot 1{,}5 + 480 = 1070.$$

Таким образом, непополняемый вклад выгоднее.

б) При пополняемом вкладе сумма к концу года составит

$$S_1 = M + M \cdot 12 \cdot 0{,}01 + 12X + X \cdot 0{,}01 \cdot (11 + 10 + \ldots + 1 + 0) = 1{,}12M + 12{,}66X.$$

При непополняемом вкладе сумма к концу года составит

$$S_2 = M + M \cdot 12 \cdot 0{,}015 + 12X = 1{,}18M + 12X.$$

Выгоднее выбирать пополняемый вклад, если $S_1 \geqslant S_2$, то есть $1{,}12M + 12{,}66X \geqslant 1{,}18M + 12X$. После преобразований получаем $0{,}06M \leqslant 0{,}66X$, то есть $k = M/X \leqslant 0{,}66/0{,}06 = 11$.

Таким образом, люди, у которых $5 \leqslant k \leqslant 11$, выберут пополняемый вклад, а люди, у которых $11 < k \leqslant 15$, выберут непополняемый. Значит, доля людей, которые предпочтут пополняемый вклад, равна

$$10\,\% + 20\,\% + 30\,\% = 60\,\%.$$

Ответ: 60 % или 0,6.

Схема проверки

Ответ пункта **а)** может быть получен в пункте **б)**. Действительно, в пункте **а)** $k = 500/40 = 12{,}5 > 11$, и поэтому непополняемый вклад выгоднее. Если участник использует это рассуждение и не приводит расчеты S_1 и S_2 для пункта **а)**, ему или ей все равно ставится **10 баллов** за пункт **а)**.

а) Всего за пункт — **10 баллов**.

- Верно подсчитана сумма к концу года для пополняемого вклада — **4 балла**.
- Верно подсчитана сумма к концу года для непополняемого вклада — **4 балла**.
- На основании корректно рассчитанных сумм сделан вывод, что непополняемый вклад предпочтителен, — **2 балла**.

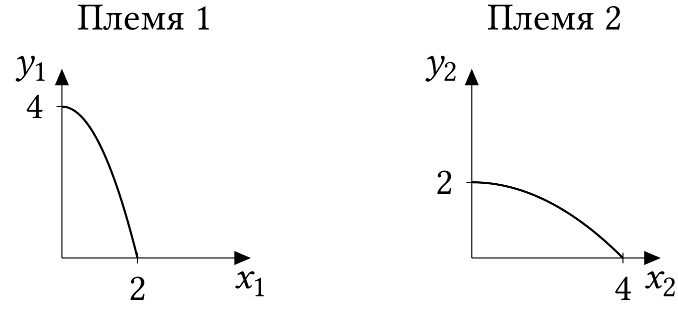
б) Всего за пункт — **20 баллов**.

- Корректно записано выражение (от M и X) для суммы к концу года при пополняемом вкладе — **4 балла**.
- Корректно записано выражение (от M и X) для суммы к концу года при непополняемом вкладе — **4 балла**.
- Составлено неравенство, иллюстрирующее, какой вклад при каких параметрах предпочтительнее, — **4 балла**.
- Решено составленное неравенство — получено граничное значение k — **4 балла**.
- Приведена доля людей, предпочитающих пополняемый вклад, — **4 балла**.

Задание 8. *Сложение квадратичных КПВ* *(30 баллов)*

На острове Паабалор есть два племени, живущие охотой и собирательством. Племена потребляют мясо (x) и плоды (y). Уравнения и графики КПВ имеют вид:

$$y_1 = 4 - x_1^2$$
$$y_2 = 2 - x_2^2/8$$



а) *(8 баллов)* Какое максимальное количество плодов может быть собрано на острове, если всего нужно добыть 3 единицы мяса?

б) *(8 баллов)* Какое максимальное количество плодов может быть собрано на острове, если всего нужно добыть 5 единиц мяса?

в) *(14 баллов)* Определите уравнение КПВ острова.

Решение

а) Найдем, как нужно разделить обязанности племен по добыче 3 единиц мяса, чтобы в итоге количество собранных плодов было максимально, то есть решим задачу

$$y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \longrightarrow \max$$

при условии $x_1 + x_2 = 3$, а также $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$.

Подставляя в целевую функцию $x_2 = 3 - x_1$, получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (3 - x_1)^2/8 \longrightarrow \max .$$

При этом найти максимум этой функции надо на отрезке [0;2], так как первое племя не может добыть больше 2 единиц мяса. При этом производство второго племени будет изменяться от 1 до 3. Эти количества для второго племени возможны, так что дополнительных ограничений не возникает. Находя вершину этой параболы с ветвями вниз, получаем, что $x_1^\star = 1/3$, что принадлежит отрезку [0;2]. Значит, это и есть искомый максимум. Второе племя будет производить $3 - 1/3 = 8/3$ единиц мяса. Общее количество собранных плодов при этом равно $6 - (1/3)^2 - (8/3)^2/8 = 5$.

Тот же ответ можно получить, если оптимизировать по x_2 функцию $6 - (3 - x_2)^2 - x_2^2/8$. Оптимизировать нужно на отрезке $[1; 3]$, так как $x_2 \leqslant 3$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \geqslant 0$, и $x_2 \geqslant 1$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \leqslant 2$.

Кроме того, точку $x_1^\star = 1/3$ можно получить, приравнивая производную целевой функции к нулю, или, что эквивалентно, приравнивая альтернативные издержки производства для двух племен. Для первого племени альтернативные издержки равны $|(4 - x_1^2)'| = 2x_1$, для второго — $|(2 - x_2^2/8)'| = x_2/4$.

б) Теперь нужно решить задачу

$$y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \longrightarrow \max$$

при условиях $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$. Аналогично пункту **а)**, получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (5 - x_1)^2/8 \longrightarrow \max .$$

Второе племя не может добыть больше 4 единиц мяса. Значит, первому племени надо будет добыть минимум одну единицу мяса. Таким образом, максимум этой функции мы будем искать на отрезке [1;2]. Вершиной данной параболы с ветвями вниз является точка $x_1 = 5/9 < 1$, и значит, максимум будет достигаться на краю отрезка, в точке $x_1^\star = 1$. Второе племя произведет все оставшиеся четыре единицы, а количество собранных плодов будет равно 3.

Тот же ответ можно получить, если оптимизировать по x_2 функцию $6 - (5 - x_2)^2 - x_2^2/8$. Оптимизировать нужно на отрезке $[3; 4]$; $x_2 \geqslant 3$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \leqslant 2$.

Кроме того, решение $x_1^\star = 1$ можно получить, если заметить, что производная целевой функции $6 - x_1^2 - (5 - x_1)^2/8$ отрицательна на отрезке [1;2], или, что эквивалентно, для любого $x_1 \in [1; 2]$ альтернативные издержки добычи мяса первым племенем в точке x_1 больше, чем альтернативные издержки добычи мяса вторым племенем в точке $5 - x_1$.

в) КПВ есть не что иное, как график функции, показывающей, какое максимальное количество Игрека можно произвести, если всего требуется произвести X единиц Икса. Две точки на КПВ острова мы уже нашли − (3;5) и (5;3). Теперь осталось найти остальные, решив ту же задачу максимизации уже для произвольного значения X, то есть

$$Y = y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \longrightarrow \max$$

при условиях $x_1 + x_2 = X$, $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$. Ясно, что $X \in [0; 6]$.

Переходя к оптимизации по одной переменной, получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (X - x_1)^2/8 \longrightarrow \max ,$$

где X — параметр.

Если $X \leqslant 4$, эту задачу надо решать на отрезке $[0; 2]$ — для любого $x_1 \in [0; 2]$, второе племя сможет произвести $X - x_1$. Если же $X > 4$, $x_1 \in [X - 4; 2]$, так как первое племя должно будет произвести минимум $X - 4$ единицы мяса.

Нетрудно определить, что вершина параболы с ветвями вниз $6 - x_1^2 - (X - x_1)^2/8$ находится в точке $x_1 = X/9$.

Случай 1. $X \leqslant 4$, и поэтому $x_1 \in [0; 2]$. $X/9$ принадлежит этому отрезку для любого $X \leqslant 4$, а значит, $x_1^\star(X) = X/9$ будет решением задачи. Тогда $Y = 6 - (X/9)^2 - (8X/9)^2/8 = 6 - X^2/9$.

Случай 2. $X \in (4; 6]$, и поэтому $x_1 \in [X - 4; 2]$. $X/9$ принадлежит этому отрезку при $X/9 \geqslant X - 4$, или $X \leqslant 4{,}5$. Значит, решением будет

$$x_1^\star(X) = \begin{cases} X/9, & X \leqslant 4{,}5; \\ X - 4, & X > 4{,}5. \end{cases}$$

Действительно, если вершина параболы с ветвями вниз лежит левее допустимого отрезка, оптимум достигается в левом конце отрезка. При $X > 4{,}5$ максимальное количество собранных плодов будет равно

$$Y = 4 - (X-4)^2 + 0 = 4 - (X-4)^2.$$

Обобщая, получаем, что КПВ острова задается уравнением

$$Y = \begin{cases} 6 - X^2/9, & X \leqslant 4{,}5; \\ 4 - (X-4)^2, & 4{,}5 \leqslant X \leqslant 6. \end{cases}$$

Тот же ответ можно получить, оптимизируя по x_2 и обобщая анализ в пунктах **а)** и **б)**. При $X < 2$ максимизацию по x_2 нужно проводить на отрезке $[0; 4]$, а при $X \geqslant 2$ — на отрезке $[X-2; 4]$. Граничное значение $X = 4{,}5$ определяется из условия $8X/9 = 4$.

Кроме того, решить пункт можно с помощью производной или анализа альтернативных издержек. При $X \leqslant 4{,}5$ является доступным распределение $(x_1, x_2) = (X/9, 8X/9)$, при котором производная целевой функции равна нулю (альтернативные издержки двух племен равны). Поскольку альтернативные издержки обоих племен возрастают, производная целевой функции убывает, и значит, это точка максимума. При $X > 4$ это распределение не является доступным, так как $8X/9 > 4$. При оптимизации по x_1 производная целевой функции отрицательна на отрезке $[X-4; 2]$ — альтернативные издержки первого племени больше в точке x_1, чем альтернативные издержки второго племени в точке $X - x_1$ — и потому оптимальным является минимальное значение x_1, то есть $X - 4$.

Примечание 1: КПВ острова имеет вид

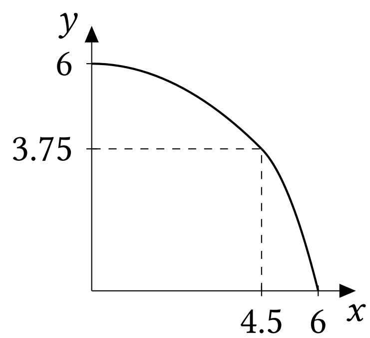


Рис. 8.1: КПВ острова.

Можно показать, что излома в точке $(4{,}5; 3{,}75)$ нет, наклон КПВ как при приближении слева, так и при приближении справа к этой точке стремится к единице. Подумайте, почему так происходит.

Примечание 2: В данном случае альтернативные издержки не являются постоянными и стремятся к нулю для малых значений x для обоих племен. Поэтому найти суммарную КПВ методом определения «порядка», в котором племена должны производить x (как в случае, если хотя бы одна из двух КПВ является линейной), не представляется возможным. Тем не менее, найденное решение отражает то, что альтернативные издержки производства Икса для первого племени растут быстрее (то есть оно «в целом хуже» производит Икс). Действительно, при $X < 4{,}5$ при оптимальном распределении производства первое племя производит лишь одну девятую общего объема, а второе — восемь девятых. И лишь когда производственных возможностей второго племени становится недостаточно, доля Икса, произведенного первым пле-менем, растет.

Схема проверки

а) Всего за пункт — **8 баллов**.

- Выписывание функции двух переменных, которую нужно максимизировать, — **2 балла**.
- Переход к оптимизации по одной переменной — **1 балл**.
- Нахождение кандидата на оптимум x_1 или x_2 через вершину параболы или производную (равенство альтернативных издержек)— **1 балл**.
- Проверка достаточных условий максимума (указание на направление ветвей параболы вниз, на смену знака первой производной с плюса на минус, отрицательность второй производной или указание на то, что альтернативные издержки возрастают) — **1 балл**.
- Проверка того, что найденное значение x_1 принадлежит отрезку $[0;2]$, — **1 балл**.
- Проверка того, что найденное значение x_2 принадлежит отрезку $[0;4]$, — **1 балл**.
- Определение максимального значения Y — **1 балл**.

б) Всего за пункт — **8 баллов**.

- Выписывание функции двух переменных, которую нужно максимизировать, — **2 балла**.
- Переход к оптимизации по одной переменной — **1 балл**.
- Правильное определение краевого оптимума $(x_1^\star, x_2^\star) = (1{,}4)$ — **4 балла.**, причем определить его можно двумя способами: (1) найти вершину соответствующей параболы, отметить, что вершина не принадлежит допустимому отрезку, сослаться на направление ветвей параболы и сделать вывод, что оптимум достигается на границе отрезка; (2) с помощью производной доказать, что функция монотонна на допустимом отрезке, и потому оптимум достигается на указанной границе отрезка. Второй способ эквивалентен сравнению альтернативных издержек в соответствующих точках.
- Определение максимального значения Y — **1 балл**.

Если участник сделал вывод, что решение будет в вершине параболы, за пункт при верных вычислениях ставится **3 балла**.

Если участник сослался на симметрию и вывел ответ из результата пункта а): «в а) получилось, что при $X = 3$ максимальное значение Y равно 5, значит при $Y = 5$ максимальное значение X равно 3, и значит, в силу симметрии, при $X = 5$ максимальное Y равно 3, — за пункт ставится **0 баллов**, так как в данной задаче симметрии между X и Y нет, КПВ племен не переходят друг в друга при симметрии относительно $Y = X$, и итоговая КПВ также не является симметричной.

в) Всего за пункт — **14 баллов**.

- Постановка оптимизационной задачи при произвольном X — **5 баллов**.

- Переход к оптимизации по одной переменной — **1 балл**.
- Правильное для каждого X определение отрезка, на котором производится оптимизация, — **2 балла**.
- Определение вершины параболы или точки, где производная равна нулю (альтернативные издержки равны), — **1 балл**.
- Определение того, при каких X решение достигается в вершине параболы, а при каких — на границе отрезка (получение критического значения $X = 4{,}5$) — **4 балла**. Участник должен пояснить, почему оптимум достигается на границе отрезка — либо с помощью ссылки на направление ветвей параболы, либо обосновывая монотонность функции с помощью производной. Если этого не сделано, **1 балл** снимается.
- Расчет максимального значения Y — **1 балл**.