Материалы для проведения регионального этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

5 февраля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, Д. А. Демин, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. Т. Крымский, А. С. Кузнецов, С. А. Лучинин, А. К. Львов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **5 февраля 2021 г.** (I тур) и **6 февраля 2021 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2020–2021 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.1. Первоклассник составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и разбил шесть палочек на две группы по три палочки: в первой группе оказались три самых длинных палочки, а во второй — три самых коротких. Обязательно ли можно составить треугольник из трех палочек первой группы? А из трех палочек второй группы?

(*Л. Емельянов*)

Ответ. 1) Да, обязательно. 2) Нет, не обязательно.

Решение. 1) Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 \geqslant a_6$ — данные длины палочек. Так как a_1 входила в треугольник с некоторыми двумя другими палочками, то a_1 меньше их суммы, а следовательно, меньше чем сумма двух самых длинных из оставшихся палочек: $a_1 < a_2 + a_3$. Так как $a_1 \geqslant a_2$ и $a_1 \geqslant a_3$, выполнение неравенства $a_1 < a_2 + a_3$ достаточно для того, чтобы из палочек a_1, a_2, a_3 можно было составить треугольник.

2) Пусть изначально были два равных треугольника со сторонами $1, 3, 3$ и $1, 3, 3$. Тогда в группе самых коротких палочек окажутся палочки $1, 1, 3$, из которых треугольник составить нельзя.

Замечание. В 2) существует много других примеров.

Комментарий. Только верные ответы — 0 баллов.

Верное доказательство 1) — 3 балла.

Верный пример в 2) — 4 балла.

10.2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Может ли произвдение xy равняться отрицательному числу? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Первое решение. Докажем, что $xy > 0$. Предположим противное: $xy < 0$ ($xy \neq 0$ по условию). Не умаляя общности, $x > 0$, $y < 0$. Сложив данные в условии задачи неравенства, получим $x + y < 0$, т.е. $0 < x < -y$. Следовательно, $x^4 < y^4$. Но тогда $x < x^4 - y^4 < 0$ – противоречие.

Второе решение. Сложив данные в условии задачи неравенства, мы получим: $x + y < 0$. Преобразуем данные неравенства к виду: $x^4 - x > y^4$ и $y^4 - y > x^4$ и перемножим (это можно делать, так как их правые части положительны). Имеем: $xy(1 - x^3 - y^3) > 0$. Так как $x < -y$, то $x^3 < -y^3$, то есть $x^3 + y^3 < 0$. Поэтому $1 - x^3 - y^3 > 1 > 0$. Значит, xy — положительно.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Доказано, что $x + y < 0$ — 1 балл.

Ошибочные преобразования неравенств (возведение в квадрат или перемножение неравенств, знаки частей которых в решении не определены, и т.п.) — не более 1 балла за задачу.

В задаче уже указано, что числа x и y существуют. Поэтому, если доказано, что произведение xy положительно, то примера, подтверждающего возможность этой ситуации, приводить *не надо*. За отсутствие такого примера баллы не снижаются.

Только за пример, показывающий, что оба числа могут быть отрицательными, баллы не начисляются.

10.3. Пусть S – множество, состоящее из натуральных чисел. Оказалось, что для любого числа a из множества S существуют два числа b и c из множества S такие, что $a = \frac{b(3c-5)}{15}$. Докажите, что множество S бесконечно. (*Д. Крачун*)

Решение. Предположим противное, и множество S конечно. Тогда среди всех чисел множества S выберем число a, которое делится на максимальную степень тройки, пусть скажем, a делится на 3^m, но не делится на 3^{m+1}. Если условие выполняется, то $15a = b(3c - 5)$ для некоторых $b, c \in S$. Левая часть этого равенства делится на 3^{m+1}. Но тогда, поскольку $3c - 5$ не делится на 3, число b должно делится на 3^{m+1}, что противоречит выбору a.

Комментарий. Рассмотрено число a, которое делится на максимальную степень тройки, но решение не завершено и противоречие не получено — 3 балла.

10.4. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть m — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, параллельная стороне B_1C_1. Биссектриса угла $B_1A_1C_1$ пересекает m в точке K. Докажите, что описанная окружность треугольника BCK касается m. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть m пересекает BC в точке X, а P и Q — середины A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Для определенности, пусть X и C лежат по одну сторону от A_1. Для решения задачи достаточно доказать, что $XB \cdot XC = XK^2$.

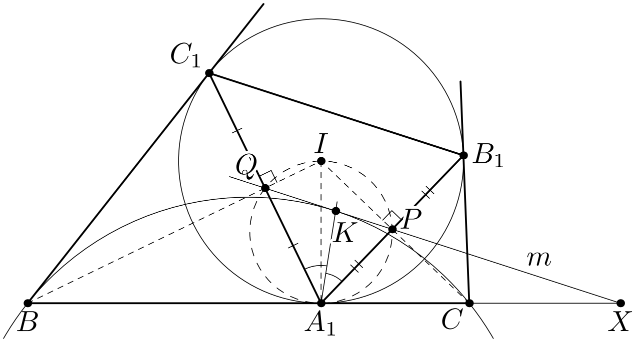


Рис. 5

Окружность (A_1PQ) получается из окружности $(A_1B_1C_1)$ гомотетией с центром A_1 и коэффициентом $1/2$. Поэтому окружность (A_1PQ) также, как и окружность $(A_1B_1C_1)$, касается BC. Используя это касание, имеем $\angle KA_1X = \angle KA_1P + \angle PA_1X = \angle KA_1Q + \angle PQA_1 = \angle A_1KX$. Следовательно, треугольник KXA_1 равнобедренный, в нем $XA_1 = XK$. Также из касания следует равенство $XP \cdot XQ = XA_1^2$.

Далее, пусть I — центр окружности $(A_1B_1C_1)$. Точки A_1 и B_1 симметричны относительно IC, значит, A_1P — высота в прямоугольном треугольнике IA_1C, откуда $IC \cdot IP = IA_1^2$. Аналогично $IB \cdot IQ = IA_1^2$, откуда $IC \cdot IP = IB \cdot IQ$, следовательно, $BQPC$ — вписанный.

Окончательно, получаем $XB \cdot XC = XP \cdot XQ = XA_1^2 = XK^2$, что и требовалось.

Комментарий. (a) Введение точки X и утверждение о том, что достаточно доказать равенство $XB \cdot XC = XK^2$ — 1 балл.

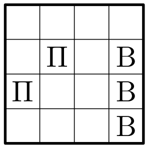
(b) Доказано, что окружность (A_1PQ) касается BC — 1 балл.

(c) Доказано, что $XA_1 = XK$ — 1 балл.

(d) Доказано, что $BQPC$ — вписанный — 1 балл.

Если в работе есть несколько из продвижений (a), (b), (c), (d), то баллы за них суммируются.

10.5. Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке справа показаны вохможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (*М. Дидин*)



Ответ. Выигрывает Петя.

Решение. Приведём одну из возможных выигрышных стратегий для Пети. Он всё время будет делать ходы, параллельные одной из диагоналей доски (назовём её *главной*).

Первым ходом Петя закрасит все клетки главной диагонали. После этого доска разбивается на две одинаковых «лесенки» (см. рис. 6). Мысленно сделаем каждую лесенку симметричной относительно вертикальной прямой, сдвинув в ней каждый горизонтальный ряд, кроме первого, на пол-клетки относительно предыдущего ряда (см. рис. 7).

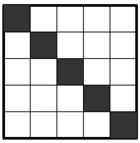


Рис. 6

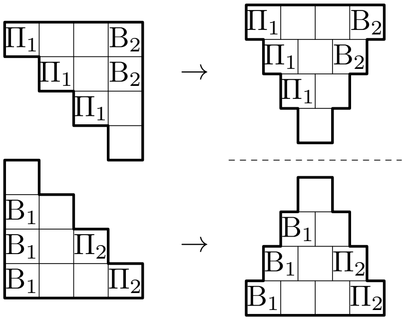


Рис. 7

В результате сдвигов и бывшие вертикали, и бывшие диагонали, параллельные главной, стали наклонными рядами. При этом «вертикали» одной лесенки симметричны «диагоналям» другой. Это значит, что на каждый ход Васи Петя может ответить симметричным ходом в другую лесенку (два таких ответа показаны на рис. 7). Тогда после каждого Петиного хода ситуация на «сдвинутой» картинке бует оставаться симметричной, а значит, Петя всегда сможет сходит согласно описанной стратегии. Так как игра закончится (не более чем за 10^4 ходов), в некоторый момент Васе будет некуда ходить, и Петя выиграет.

Комментарий. Только верный ответ и, возможно, правильный первый ход Пети — 0 баллов.

То же, с (неверными) попытками устроить симметричную стратегию после первого хода — 1 балл.