Задача 1.8.1. «Часы» (10 баллов). На часах в некоторый момент времени угол между часовой и минутной стрелками составил $\alpha = 60°$. Определите, через сколько минут угол между стрелками в следующий раз может снова оказаться равным α?
Положение стрелок на рисунке – условное.

Решение (В. Яворский). Минутная стрелка за час (60 минут) повернётся на угол 360°, а за минуту – на 360°/60 мин = 6°. Часовая стрелка за 12 часов совершит полный оборот, т.е. повернётся на угол 360°, а за час на 360°/12 ч = 30°. За минуту она повернётся на 0,5°. Таким образом, минутная стрелка поворачивается в **12 раз** быстрее, чем часовая.

Заметим, что в условии не сказано, какая из стрелок изначально находится «впереди». Следовательно, возможны два варианта решения, когда А) часовая стрелка опережает минутную и Б) минутная стрелка опережает часовую. Рассмотрим эти варианты.

А) Часовая стрелка опережает минутную на угол $\alpha = 60°$. Пусть часовая стрелка повернулась на угол β. Тогда минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = \alpha + \beta + \alpha$.

$$2\alpha + \beta = 12\beta.$$

$$\beta = 2\alpha/11 = 2\cdot 60°/11 \approx 11°.$$

В результате получим $\varphi \approx 2\cdot 60° + 11° = 131°$. На это минутной стрелке потребуется время $t_1 \approx 131°/(6°/\text{мин}) \approx 22$ мин.

Б) Минутная стрелка опережает часовую на угол $\alpha = 60°$. Пусть часовая стрелка повернулась на угол β. Тогда минутная стрелка повернулась на угол $\varphi = 360° - 2\alpha + \beta$.

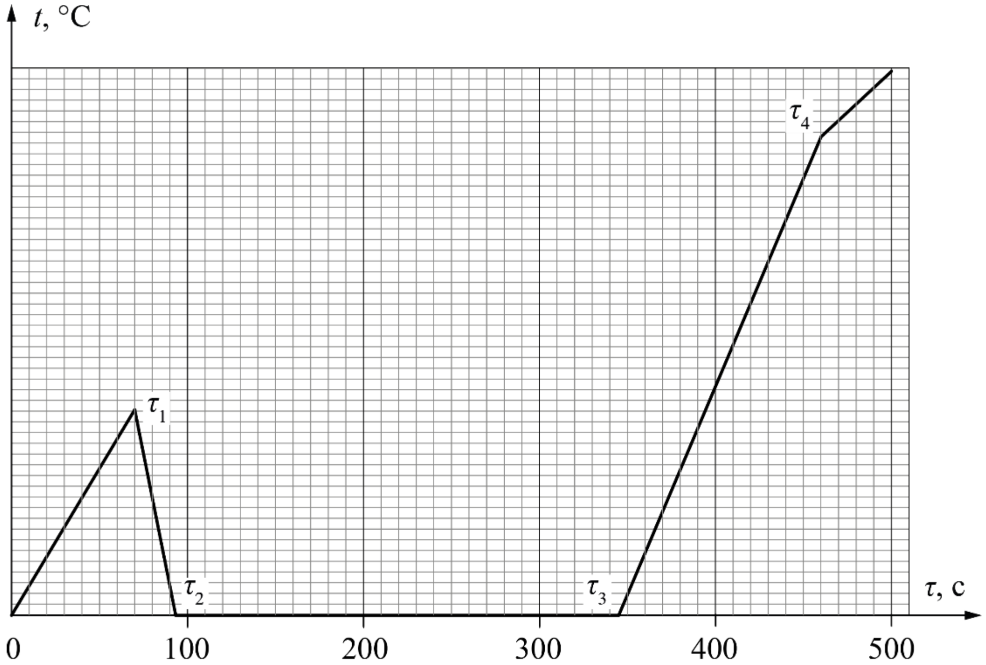
$$360° - 2\cdot 60° + \beta = 12\beta.$$

$$\beta = 240°/11 \approx 22°.$$

Итак, минутная стрелка повернулась на угол $360° - 120° + 22° \approx 262°$ за время $t_2 \approx 262°/(6°/\text{мин}) \approx 44$ мин.

№	**Задача 1.8.1. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Показано, что минутная стрелка поворачивается в **12 раз** быстрее, чем часовая	2
2	А) Учтено, что минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = \alpha + \beta + \alpha$	3
	Найдено время $t_1 \approx 131°/(6°/\text{мин}) \approx 22$ мин.	1
3	Б) Учтено, что минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = 360° - 2\alpha + \beta$	3
4	Найдено время $t_2 \approx 262°/(6°/\text{мин}) \approx 44$ мин.	1

Задача 1.8.2. Соревнование калориметров (10 баллов). В два калориметра положили по куску льда и в течение $\tau_К = 10$ минут стали нагревать их содержимое с одинаковой мощностью. Известно, что первый кусок льда легче второго на $\Delta m = 100$ г. На рисунке приведена зависимость разности температур *t* в калориметрах от времени *τ*.



К сожалению, шкала оси разности температур не сохранились, а изломам графика соответствуют времена τ_1, τ_2, τ_3, τ_4.
Объясните, какие физические процессы соответствуют каждому линейному участку графика.
Определите:
1) мощность *P* нагревателя;
2) массы m_1 и m_2 кусков льда;
3) начальные и конечные температуры кусков льда;
4) разность температур Δt в момент времени τ_1.

Справочные данные: удельная теплоемкость льда $c_Л = 2\,100$ Дж/кг°С, удельная теплоемкость воды $c_В = 4\,200$ Дж/кг°С, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ КДж/кг.

Решение (А. Евсеев). Из графика находим: $\tau_1 = 70$ с, $\tau_2 = 93$ с, $\tau_3 = 345$ с, $\tau_4 = 460$ с. Поскольку график начинается из нуля, температуры кусков льда вначале равны. Первые 70 с разность температур растет. Потом, более легкий кусок начинает плавиться, и разность температур уменьшается в течение 23 с. Третий участок графика соответствует плавлению обоих кусков льда, когда их температура неизменна (0°C). Это происходит в течение 252 с. Четвертый участок соответствует нагреву воды в том калориметре, где был кусок меньшей массы, а в другом – продолжает плавится лед (115 с). На пятом – в обоих калориметрах нагревается вода.

Разница во времени плавления обусловлена разницей в массе кусков льда. Т.е. время, которое ушло на плавление дополнительных 100 г льда – это [(τ_4 – τ_2) – (τ_3 - τ_1)] = 91,7 с. Отсюда мощность нагрева: $P = \dfrac{\lambda \Delta m}{\tau} \approx 360$ Вт.

Разница во времени нагрева до температуры плавления обусловлена разницей в массе кусков льда. Т. е. дополнительные 23,3 с – это время, которое ушло на нагрев 100 г льда от температуры вначале до 0°C. Откуда, $t_{01} = t_{02} = t_0 = \dfrac{-P\tau_1}{c_л \Delta m} = -\,40\ ^\circ\text{C}$.

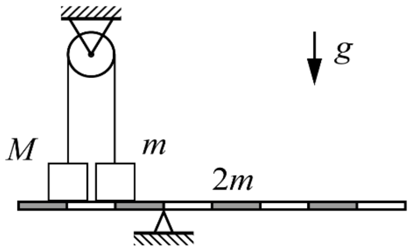
За 70 с легкий кусок льда нагревается до 0°C. Значит его масса: $m_1 = \dfrac{-P\tau_1}{c_л t_0} \approx 0,3$ кг. Масса второго куска $m_2 \approx 0,4$ кг.

За те же 70 с второй кусок успеет нагреться до $t_{21} = \dfrac{c_л m_2 t_0 + P\tau_1}{c_л m_2} \approx -10\ ^\circ\text{C}$,

то есть температуры кусков льда будут отличаться от Δt = 10 °C.
К концу нагрева в первом калориметре установится температура:

$$t_{1К} = \frac{P(\tau_К - \tau_3)}{c_в m_1} \approx 73\ ^\circ\text{C}\text{, а во втором } t_{2К} = \frac{P(\tau_К - \tau_4)}{c_в m_2} \approx 30\ ^\circ\text{C}.$$

№	Задача 1.8.2. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Верно интерпретирован график:	2
	указано, что происходит в каждом калориметре на участках от 0 до τ_2 (1 балл)	
	указано, что происходит в каждом калориметре на участках после τ_3 (1 балл)	
2	Указано, что начальная температура кусков льда одинакова	0,5
3	Определена мощность нагревателя	2
4	Определена начальная температура в калориметрах	1,5
5	Определены исходные массы кусков льда (по 0,5 за каждую массу)	1
6	Определена разность температур в момент времени τ_1	1
7	Определены конечные температуры в калориметрах (по 1 баллу за каждую)	2



Задача 1.8.3. Неразрывность (10 баллов). При каких значениях масс груза M возможно равновесие системы, приведенной на рисунке, если $m = 4{,}0$ кг? Горизонтальный рычаг массой $2m$ разделен на 8 одинаковых участков. Нить выдерживает максимальное натяжение $T_0 = 25$ Н. $g = 10$ Н/кг.

Возможное решение (М. Замятнин). Если груз M очень легкий, то связанный с ним нитью груз m перевешивает и касается рычага. Но вращающего момента груза m относительно точки опоры недостаточно, чтобы уравновесить момент силы тяжести самого рычага. Рычаг начинает проворачиваться по часовой стрелке. Нить провисает, и оба груза m и M «встают» на рычаг. Для равновесия системы необходимо, чтобы выполнилось правило моментов относительно точки опоры:

$$Mg2l + mgl = 2mgl, \qquad (1)$$

где l – длина одного участка рычага.

Тогда минимальное значение M для равновесия системы равно $M = m/2$. Нить при этом не натянута.

Рассмотрим случай больших масс M. При $M > m$ перевешивает груз M и он начинает давить на рычаг, а груз m повисает на нити. Для равновесия системы теперь достаточно выполнения условия:

$$(M - m)g2l = 2mgl \text{, откуда } M = 2m. \qquad (2)$$

Если не было бы ограничения на силу натяжения нити, равновесие системы наступило при $m/2 < M < 2m$, или 2,0 кг $< M <$ 8,0 кг. Но при больших значениях M груз m оказывается подвешенным, и сила натяжения становится 40 Н. Нить обрывается.

Рассмотрим случай, когда нить натянута до предельного значения T_0, но грузы не отрываются от рычага. Правило моментов принимает вид:

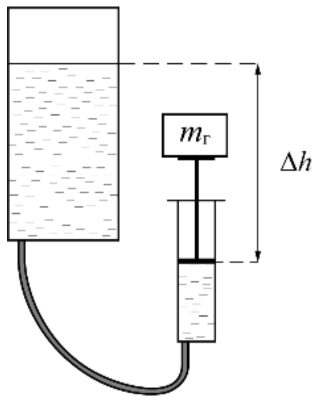
$$(Mg - T_0)2l + (mg - T_0)l = 2mgl, \qquad (3)$$

откуда $M = 0{,}5(m + 3T_0/g) = 5{,}75$ кг.

Таким образом, равновесие системы возможно при 2,0 кг $< M <$ 5,75 кг.

№	Задача 1.8.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Учет нескольких возможных сценариев нарушения равновесия	1
2	Анализ случая малых значений M и правило моментов (1)	1,5
3	Нахождение нижней границы: $M > 2{,}0$ кг	1
4	Анализ случая больших значений M и правило моментов (2)	1,5
5	Нахождение верхней границы $M < 8{,}0$ кг	1
6	Учет предельного значения силы натяжения	1
7	Правило моментов (3)	2
8	Явно указан **правильный** диапазон допустимых значений M, а не только его границы	1

Задача 1.8.4. Физика в медицине (20 баллов). Для измерения некоторых технических характеристик медицинского шприца экспериментатор Глюк собрал установку, изображенную на рисунке. Исследуемый шприц он закрепил в вертикальном положении. Вместо иглы к нему присоединил тонкую гибкую трубку, второй конец которой соединил с отверстием в дне цилиндрического сосуда. Затем Глюк измерил разность уровней Δh воды в сосуде и шприце, при которой поршень шприца начинал двигаться вверх в процессе плавного подъема сосуда. Оказалось, что величина Δh зависит от массы $m_г$ груза, закрепленного на верхнем упоре поршня. Результаты измерений зависимости $\Delta h(m_г)$ он представил в таблице, в которой также приведена $\Delta h_х$ для груза неизвестной массы $m_х$.



Примечания: массой поршня можно пренебречь; воздушная прослойка между поршнем и водой в шприце отсутствует; плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3; $g = 10$ Н/кг ,

Определите площадь S поршня и силу трения скольжения $F_{тр}$ между поршнем и стенкой шприца. Для этого:

1. Выведите теоретическую зависимость $\Delta h(m_г)$.
2. Постройте график экспериментальной зависимости $\Delta h(m_г)$
3. С помощью графика определите $F_{тр}$ и S.
4. Чему равна неизвестная масса $m_х$ груза в шестой строке таблицы?

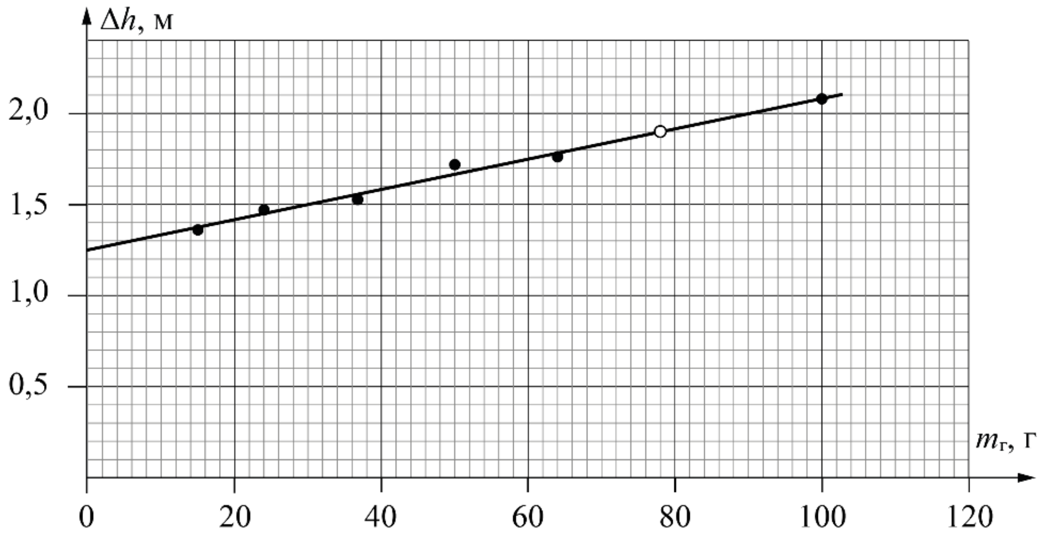
№	$m_г$, г	Δh, м
1	15	1,36
2	24	1,47
3	37	1,53
4	52	1,72
5	64	1,76
6	$m_х$	1,90
7	100	2,08

Решение (М. Чжан, С. Кармазин).

1. При равномерном движении поршня вверх сила тяжести груза и сила трения между поршнем и стенкой шприца уравновешены силой давления столба воды высотой Δh (атмосферное давление можно не учитывать):

$$m_г g + F_{тр} = \rho g S \Delta h,$$

Откуда



(1)

2. Мы видим, что Δh линейно зависит от $m_г$ (см. график).

3. Для вычисления углового коэффициента прямой линии на графике удобно использовать точку $m_{г1}$ = 6 г, Δh_1 = 1,3 м, а также $m_{г2}$ = 90 г, Δh_2 = 2 м.

Из формулы (1) и графика вычисляем угловой коэффициент

$$k = \frac{1}{\rho S} = \frac{\Delta h_2 - \Delta h_1}{\Delta m_г} = \frac{0,7}{0,084}\left(\frac{м}{кг}\right) = 8,33\left(\frac{м}{кг}\right)$$

и находим площадь поршня $S = \frac{1}{k\rho} = \frac{1}{8330}\,м^2 = 1,2\,см^2$.

Из графика видно, что при $m_г$ = 0 прямая линия пересекает вертикальную ось в точке Δh_0 = 1,25 м. В соответствие с (1) находим $F_{тр} = \rho g S \Delta h_0 = 10^3 10 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}\, 1,25\ Н = 1,5\ Н$.

4. Из графика видно, что при $\Delta h_х$ = 1,9 м масса груза должна быть равной m_x = 78 г.

№	**Задача 1.8.4. Критерии оценивания (20 баллов)**	**Баллы**
1	Получена зависимость (1)	5
2	Построен график зависимости $\Delta h(m_г)$	5
	Указаны единицы измерения по обоим осям (1 балл)	
	Выбран разумный масштаб осей (1 балл)	
	Нанесены значения у делений осей (1 балл)	
	Нанесены экспериментальные точки (1 балл)	
	Через экспериментальные точки проведена прямая (1 балл)	
3	Найдена площадь поршня $S \in (1{,}15\ см^2 - 1{,}25 см^2)$	4
	$S \in (1{,}10\ см^2 - 1{,}14\ см^2)$ или $(1{,}26\ см^2 - 1{,}30\ см^2)$ (2 балла)	
	$S \in (1{,}00\ см^2 - 1{,}09\ см^2)$ или $(1{,}31\ см^2 - 1{,}40\ см^2)$ (1 балл)	
4	С помощью графика определена $F_{тр}$: $F_{тр} \in (1{,}45\ Н - 1{,}55\ Н)$	4
	$F_{тр} \in (1{,}40\ Н - 1{,}44\ Н)$ или $(1{,}56\ Н - 1{,}60\ Н)$ (2 балла)	
	$F_{тр} \in (1{,}30\ Н - 1{,}39\ Н)$ или $(1{,}61\ Н - 1{,}70\ Н)$ (1 балл)	
5	Найдена масса груза $m_х$: $m_х \in (76\ г - 80\ г)$	2
	$m_х \in (73 - 75\ г)$ или $(81 - 83\ г)$ (1 балл)	