10 класс

10.5. На доске написаны 11 целых чисел (не обязательно различных). Может ли оказаться, что произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести? (*И. Богданов*)

Ответ. Может.

Решение. Пусть одно из чисел равно 10, а каждое из остальных равно -1. Тогда произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести. Действительно, если число 10 входит в произведение пяти чисел, то это произведение равно 10, а произведение оставшихся шести чисел равно 1, и $10 > 1$. Если же число 10 не входит в произведение пяти чисел, то это произведение равно -1, а произведение оставшихся шести чисел равно -10, и $-1 > -10$.

10.6. Дано натуральное число $n > 5$. На кольцевой полоске бумаги написана последовательность из нулей и единиц. Для каждой последовательности w из n нулей и единиц посчитали количество способов вырезать из полоски фрагмент, на котором написана w. Оказалось, что наибольшее количество M достигается на последовательности $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$, а наименьшее (возможно, нулевое) — на последовательности $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$. Докажите, что есть и другая последовательность из n нулей и единиц, встречающаяся ровно M раз. (*И. Богданов*)

Решение. Обозначим через N количество способов вырезать из полоски последовательность $1\underbrace{00\ldots0}_{\geqslant n-2}1$ (т.е. количество последовательностей из хотя бы $n-2$ нулей, перед и после которых стоят единицы). Перед каждой из них может стоять или 1, или 0; обозначим количество тех, перед которыми стоят 1, через N_{1x}, перед которыми стоят 0 — через N_{0x}. После каждой из N последовательностей может стоять или 0, или 1; аналогично предыдущему предложению введём количества N_{x0} и N_{x1}. Тогда

$$N_{0x} + N_{1x} = N = N_{x0} + N_{x1}. \qquad (*)$$

Заметим, что N_{1x} — это количество способов вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{\geqslant n-2}1$. Каждый такой способ соответствует способу вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$; и наоборот, каждый способ вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$ можно единственным образом дополнить до способа вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{\geqslant n-2}1$. Значит, количества таких способов одинаковые, и $N_{1x} = M$. Аналогично N_{0x}, N_{x0} и N_{x1} равняются количествам способов вырезать последовательности $01\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$, $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10$ и $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$ соответственно. По условию, последовательность $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$ встречается наименьшее число раз, откуда $N_{0x} \geqslant N_{x1}$. Тогда, с учётом $(*)$, получаем $N_{x0} \geqslant N_{1x} = M$, что возможно только при $N_{x0} = M$. Значит, последовательность $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10$ также встречается ровно M раз.

Замечание. То же самое решение можно изложить на немного другом языке. Обозначим через x^k последовательность из k букв x. Для слова w обозначим через $f(w)$ количество способов вырезать w из полоски. Тогда для любого слова w выполнено равенство $f(w) = f(0w) + f(1w) = f(w0) + f(w1)$.

Заметим, что $f(10^{n-1})+f(0^n) = f(0^{n-1}) = f(0^n)+f(0^{n-1}1)$, так что $f(10^{n-1}) = f(0^{n-1}1)$.

Теперь

$$f(110^{n-2}) + f(010^{n-2}) = f(10^{n-2}) = f(10^{n-2}1) + f(10^{n-1}) =$$
$$= f(10^{n-2}1) + f(0^{n-1}1) = f(0^{n-2}1) = f(0^{n-2}11) + f(0^{n-2}10).$$

Таким образом, разность между наибольшим и наименьшим количествами способов равна

$$f(110^{n-2}) - f(0^{n-2}11) = f(0^{n-2}10) - f(010^{n-2}).$$

В частности, должно выполняться $f(0^{n-2}10) = M$.

10.7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, а на стороне AD — точка F так, что описанная окружность треугольника ABE касается отрезка CF. Докажите, что описанная окружность треугольника CDF касается прямой AE.

(*А. Кузнецов, П. Кожевников*)

Первое решение. Обозначим точку касания окружности (ABE) с отрезком CF через P. Пусть прямая, проходящая через C и параллельная AP, пересекает отрезок AE в точке Q (см. рис. 2). Тогда $\angle QCP = \angle APF = \angle AEP$ (из упомянутых выше касания и параллельности). Значит, четырёхугольник $CEQP$ вписанный. Имеем $\angle QPC = 180^\circ - \angle QEC = \angle QAF$. Следовательно, четырёхугольник $QPFA$ вписанный. Тогда $\angle AQF = \angle APF = \angle QCP$, откуда $QF \parallel EP$. Значит, прямые CQ, EP, PA и QF ограничивают параллелограмм, откуда $\angle CQF = \angle APE$. Так как $\angle APE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle CDF$, то точка Q лежит на окружности (CDF). Раз $\angle AQF = \angle QCP$, то окружность (CDF) касается отрезка AE в точке Q, что и требовалось.

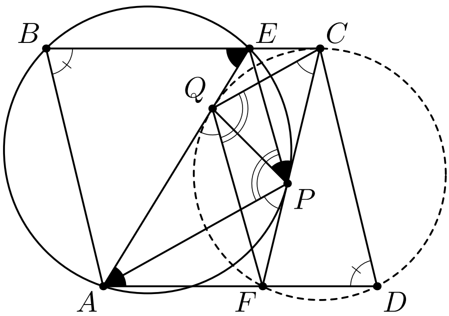

Рис. 2

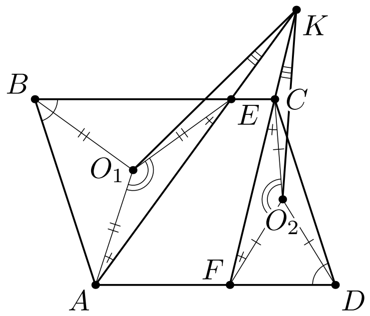

Рис. 3

Второе решение. Обозначим через O_1 центр окружности (ABE), пусть R_1 — её радиус и d_1 — расстояние от точки O_1 до прямой CF. Обозначим через O_2 центр окружности (CDF), пусть R_2 — её радиус и d_2 — расстояние от точки O_2 до прямой AE. Мы докажем более общий факт: $d_1/R_1 = d_2/R_2$ $(\star)$.

В частности, если $d_1 = R_1$, то $d_2 = R_2$, и первое равносильно касанию прямой CF и окружности (ABE), второе — касанию прямой AE и окружности (CDF).

Если $AE \parallel CF$, то точки E и F, а также O_1 и O_2 симметричны относительно центра параллелограмма, и в силу этой центральной симметрии $d_1 = d_2$ и $R_1 = R_2$, откуда следует $(\star)$.

Иначе без ограничения общности будем считать, что луч AE пересекает луч FC, обозначим их точку пересечения через K (см. рис. 3).

Обозначим через α углы при вершинах B и D параллелограмма $ABCD$. Разберём случай $\alpha < 90^\circ$, в других случаях рассуждение аналогично. Тогда $\angle AO_1E = 2\alpha = \angle CO_2F$, поэтому равнобедренные треугольники AO_1E и CO_2F подобны, откуда $\angle EAO_1 = \angle CFO_2$ и $\frac{R_1}{R_2} = \frac{O_1A}{O_2F} = \frac{AE}{CF} = \frac{KA}{KF}$ (последнее равенство следует из теоремы Фалеса). Следовательно, треугольники KAO_1 и KFO_2 подобны по углу и отношению заключающих сторон. Значит, $\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{O_1A}{O_2F} = \frac{R_1}{R_2}$ и $\angle O_1KA = \angle O_2KF$. Тогда $\angle O_1KF = \angle O_2KA$, следовательно, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{O_1K}{O_2K} = \frac{R_1}{R_2}$, что и требовалось.

Замечание. Соотношение ($\star$) равносильно тому, что угол между окружностью (ABE) и прямой CF равен углу между окружностью (CDF) и прямой AE.

Третье решение. Пусть окружность (ABE) касается отрезка CF в точке P и вторично пересекает прямую AD в точке X. Обозначим вторую точку пересечения окружности (FCD) с прямой BC через Y (см. рис. 4). Тогда отрезки XE и AB симметричны относительно серединного перпендикуляра к BE, а отрезки CD и YF — относительно серединного перпендикуляра к DF, поэтому $\overrightarrow{XE} = \overrightarrow{FY}$. Поскольку окружность ABE касается отрезка CF, то точка X лежит на луче FA. Значит, точка Y лежит на луче EC, причём $XF = EY$.

Поскольку окружность $(ABEX)$ касается отрезка CF в точке P, $CP^2 = CE \cdot CB$ и $FP^2 = FA \cdot FX$. Значит, $CF = \sqrt{CE \cdot CB} + \sqrt{FX \cdot FA}$ ($\star$). Мы позднее докажем, что отсюда следует равенство $AE = \sqrt{AF \cdot AD} + \sqrt{EY \cdot YC}$ ($\star\star$), сначала завершим решение задачи с его помощью: отметим на отрезке AE точку T так, что $ET = \sqrt{EY \cdot EC}$ и $AT = \sqrt{AF \cdot AD}$. Если точка T отлична от концов отрезка AE, полученные равенства означают, что окружности (YCT) и (FDT) касаются прямой AE в точке T. Если эти окружности не совпадают, то они обе не совпадают и с окружностью $(FYCD)$, но в таком случае

AE, BC и AD — радикальные оси этих трех окружностей. Однако, прямые BC и AE пересекаются в точке E, не лежащей на прямой AD, противоречие. Значит, на самом деле окружности (YCT) и (FDT) совпадают, а тогда это и есть окружность (CDF), и она касается AE в точке T. Если точки Y и C совпадают, нужно, как обычно, под окружностью (YCT) понимать окружность, проходящую через T и касающуюся BC в точке Y. В случае, когда T совпадает с одним из концов отрезка AE, возможна лишь ситуация $T = E$, и тогда $EY = 0$, то есть $E = Y$, а также $AE^2 = AF \cdot AD$. Итого, окружность (CFD) касается AE в точке E.

Остаётся доказать соотношение $(\star\star)$. Положим $EY = a, EC = x, AF = y$. Из сказанного выше, векторы $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{XE}, \overrightarrow{FY}, \overrightarrow{CD}$ равны по длине, обозначим её b, а также равны их проекции на ось, сонаправленную вектору $\overrightarrow{BC}$, обозначим такую проекцию h. Положим $d = 2h - a$. Тогда $BE = y + d$ и $DF = x + d$. По теореме Птолемея для четырёхугольников $FYCD$ и $ABEX$ мы получаем, что $CF^2 = b^2 + (x+d)(x-a)$ и $AE^2 = b^2 + (y+d)(y-a)$. Отметим, что эти равенства будут выполняться вне зависимости от взаимного расположения точек A и X; C и Y. Итого, соотношение $(\star)$ имеет вид

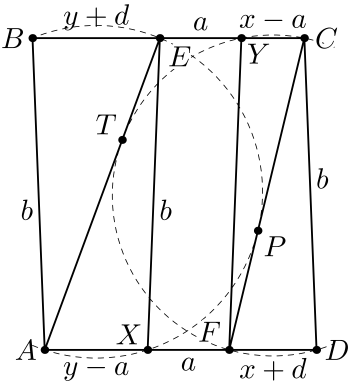

Рис. 4

$$\sqrt{b^2 + (x+d)(x-a)} = \sqrt{x(x+y+d)} + \sqrt{ay}.$$

После возведения в квадрат и сокращения общих слагаемых, получается симметричное по x и y равенство:

$$b^2 = a(x+y) + ad + xy + 2\sqrt{axy(x+y+d)}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{b^2 + (y+d)(y-a)} = \sqrt{y(x+y+d)} + \sqrt{ax},$$

а это в точности соотношение $(\star\star)$, что и требовалось.

Замечание. Точка T совпадает с точкой Q из решения 1.

10.8. Для натурального числа N рассмотрим все различные точные квадраты, которые можно получить из N вычёркиванием одной цифры в его десятичной записи. Докажите, что количество этих квадратов не превосходит некоторой величины, не зависящей от N. (*С. Берлов, Ф. Петров, Д. Крачун*)

Решение. Пусть число N состоит из $k+1$ цифры. Считаем далее, что $k > 100$: меньшие числа не влияют на искомую ограниченность.

Для $i = 1, \ldots, k$ обозначим через n_i число, получающееся удалением из N i-ой с конца цифры. Обозначим через $f(N)$ количество точных квадратов в множестве $\{n_1, \ldots, n_k\}$. Наша цель — доказать, что $f(N)$ ограничено сверху.

Пусть $N = 10^t N_1$, где N_1 не кратно 10. Если t нечётно, то число n_i может быть точным квадратом только при $i \leqslant t+1$, так что в этом случае $f(N) \leqslant 2$. Если t чётно, то заключительные t нулей не влияют на дело, поэтому $f(N) = f(N_1)$. Поэтому далее считаем, что N не кратно 10.

Выделим множество $A \subset \{1, \ldots, k\}$ из $f(N)$ номеров i, для которых $n_i = m_i^2$ — точный квадрат, причём натуральные числа m_i, $i \in A$, попарно различны.

Отметим следующее:

1) $n_i \geqslant 10^{k-1}$, следовательно $m_i \geqslant 10^{(k-1)/2}$ при всех $i \in A$;

2) $|n_i - n_j| < 10^{\max(i,j)}$;

3) $N - n_i$ кратно 10^{i-1}.

Из свойства 1) следует, что для различных номеров $i \neq j$ из A имеет место оценка

$$|n_i - n_j| = |m_i^2 - m_j^2| \geqslant m_i + m_j \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2}.$$

Сопоставляя это со свойством 2), получаем, что $\max(i,j) > (k-1)/2$. Таким образом, все элементы A, кроме, быть может, одного, больше, чем $(k-1)/2$. Обозначим $A_1 := A \setminus \{\min(A)\}$ (удалили из A наименьший элемент), тогда $|A_1| = f(N) - 1$ и $\min(A_1) \geqslant k/2$.

Пусть $j > i$ — два элемента множества A_1. Тогда по свойствам 1), 2) имеем

$$10^j > |n_i - n_j| = |m_i^2 - m_j^2| \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2} \cdot |m_i - m_j|. \qquad (1)$$

С другой стороны, по свойству 3) число $n_i - n_j = (m_i - m_j)(m_i + m_j)$ кратно 10^{i-1}.

Положим $r = \lceil (i-1)/2 \rceil$ (где $\lceil \cdot \rceil$ обозначает верхнюю целую часть). Хотя бы одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ кратно 2^r, и хотя бы одно кратно 5^r. Кроме того, если N нечётно, то нечётны числа m_i, m_j, поэтому одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ не кратно 4 — а другое, соответственно, кратно 2^{i-2}. Иначе N не кратно 5, и аналогичным образом получаем, что одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ кратно 5^{i-1}.

Рассмотрим пятиэлементное подмножество $\tilde{A} \subset A_1$, наименьший элемент $\tilde{A}$ обозначим u, а наибольший v. Обозначим $r = \lceil (u-1)/2 \rceil$. Если N нечётно, положим $\alpha = u - 2$, $\beta = r$; иначе положим $\alpha = r$, $\beta = u - 1$. Из доказанного следует, что элементы множества $\{m_s : s \in \tilde{A}\}$ дают не более двух различных остатков по модулю 2^α и не более двух различных остатков по модулю 5^β. Значит, в $\tilde{A}$ найдутся два различных элемента $i < j$ такие, что $m_j - m_i$ кратно $2^\alpha 5^\beta$. Тогда по (1) получаем

$$10^v \geqslant 10^j \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2} 2^\alpha 5^\beta \geqslant$$
$$\geqslant 10^{(k-1)/2 + (u-1)/2} 2^{(u-1)/2} > 10^{u-1} 2^{u/2},$$

откуда следует что $v/u > 1,01$. Таким образом, если разбить отрезок $[k/2, k]$ на группы подряд идущих чисел, в каждой из которых отношение любых двух элементов меньше чем $1,01$ (количество таких групп меньше, например, миллиона), то любая из этих групп содержит не более 4 элементов множества A_1. Отсюда вытекает ограниченность числа $|A_1| = f(N) - 1$.

Задача 10.1

$\leqslant 3$ б. При разборе случаев, каким может быть второй по величине главный делитель, хотя бы один из случаев рассмотрен неверно.

$\leqslant 1$ б. В работе считается, что оба главных делителя — это исходное число, поделенное на какие-то из своих простых делителей.

$\leqslant 2$ б. В работе считается, что либо главные делители — это исходное число, поделенное на какие-то из своих простых делителей, либо само исходное число — степень простого числа.

Задача 10.2

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Задача сведена к равенству треугольников ABQ и ACP или углов ABQ и ACP.

Баллы за частичные продвижения, не суммируются:

1 б. Построена точка A' — симметрия точки A относительно серединного перпендикуляра к BC (DE).

1 б. Для точек K и L пересечения окружности (ADE) с отрезками BQ и AC соответсвенно доказано, что $BK = CL$.

За ошибки в решениях снижаются баллы по *одному* из следующих критериев:

−2 б. Решение использует точку O — центр окружности (ADE), и ведется подсчет углов, корректность которого зависит от расположения точки O. Не разобран или разобран неверно случай, когда O лежит внутри одного из углов ABC или ACB, но вне треугольника ABC.

−2 б. Решение использует точку O — центр окружности (ADE), и рассматривается поворот с центром в точке O. Не доказано или доказано неверно расположение образов части точек конструкции.

За отсутствие рассмотрения случаев расположения точки O вне области, образованной объединением углов ABC и ACB, баллы не снижаются.

−2 б. Решение использует утверждение: если во вписанном четырехугольнике диагонали равны, то он равнобокая трапеция. При этом не рассмотрен один из возможных случаев параллельности противоположных сторон.

Следующие рассуждения оцениваются частичными баллами:

$\leqslant 3$ б. В работе рассматривается расположение точек P и Q вне меньшей дуги DE, и рассуждение ведется для такого случая, а не для описанного в задаче.

Задача 10.3

Следующие три продвижения не оцениваются:

0 б. Выражение операций из условия в других переменных.

0 б. Вычисление композиции пар основных операций, устранение сокращающихся пар из последовательности операций.

0 б. Доказательство того, что вместе с парой (a, b) можно получить пару $(a, -b)$.

Частичные продвижения, не суммируются:

1 б. Вычисление k-й степени первой операции.

3 б. Введение в рассмотрение выражения $b^2 - 4a$.

3 б. Рассмотрение трёхчленов $t^2 + bt + a$ для написанных на доске пар (a, b) и доказательство их положительности только при целых t, в котором условие целочисленности легко устранить.

Технические ошибки, за которые снимаются баллы:

−1 б. Деление на выражение, которое может быть 0, без разбора случая, когда оно равно 0, в ситуации, когда этот случай легко поддаётся разбору.

−1 б. Некорректное извлечение квадратного корня из неравенства в ситуации, когда достаточно исходного неравенства.

Задача 10.4

Баллы за оценку суммируются с баллами за пример.

[3 б.] Оценка, баллы суммируются:

+1 б. (U1) Оценка $\leqslant 2n - 3$.

+2 б. (U2) Оценка $\leqslant 2n - 4$ для чётных n.

Из этих 2 баллов ставится 1 в следующем случае:

+1 б. (U2a) Доказательство того, что при чётном n из каждой вершины выходит ребро с числом 1.

[4 б.] Пример, баллы суммируются:

+1 б. (L0) Формулировка и доказательство леммы о том, что в подграфе на $2m$ вершинах можно добиться, чтобы из каждой вершины выходили ребра с числами 1, 2, …, $2m - 1$.
Либо формулировка и доказательство леммы о разбиении полного графа на $2m$ вершинах на $2m - 1$ паросочетание.
(Лемма может использоваться при построении примера; так что если пример для всех чётных или для всех нечётных n построен без использования леммы или аналогичного утверждения, этот балл тоже засчитывается.)

+1 б. (L1) Пример на $2n - 3$, работающий для всех нечётных n, построенный на основе верной формулировки леммы (возможно, недоказанной).

+2 б. (L2) Пример на $2n - 4$, работающий для всех чётных n, построенный на основе верной формулировки леммы (возможно, недоказанной).

Частичные примеры, не суммируются с др. баллами за пример:

1 б. (L1a) Пример для беск. мн-ва нечётных n (например, $n = 2$^$k + 1$).

2 б. (L2a) Пример для беск. мн-ва чётных и для беск. мн-ва нечётных n (например, $n = 2$^$k + 1$, $n = 2$^$k + 2$).

Задача 10.5

0 б. В работе отсутствует верный пример.

Задача 10.6

Обозначим #(0…011), т. е. количество фрагментов, на которых написана n-символьная последовательность 0…011, за m.

Частичные продвижения, не суммируются:

2 б. Задача решена в предположении $m = 0$.

2 б. Доказано неравенство $\#(0\ldots010) \geqslant M - m$.

Задача 10.7

Ошибки в верном в целом решении, за которые снимаются баллы:

−1 б. Используется, что прямые AE и CF пересекаются, но это не обосновано, т. е. случай параллельности не рассмотрен.

Задача 10.8

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Удаление нулей на конце числа.

Частичные продвижения, не суммируются:

1 б. Доказательство того, что из правой половины числа можно вычеркнуть не более одной цифры.

2 б. Разбор случая N, взаимно простого с 10.

3 б. Разбор случая N, не кратного 5.