11 класс

11.1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

(*А.С. Голованов*)

Решение. Пусть $n > k$ — главные делители числа a; тогда a/n и a/k — два наименьших делителя числа a, бóльших единицы. Пусть p — наименьший простой делитель числа a, а q — наименьший простой делитель a, кроме p (если такой существует). Тогда $a/n = p$. Далее, a/k — либо простое число (тогда это q), либо составное. Во втором случае единственным простым делителем числа a/k является p, и потому $a/k = p^2$; этот случай реализуется ровно тогда, когда a делится на p^2, причём $p^2 < q$ или q не существует.

Итак, главные делители числа a — это либо a/p и a/q, либо a/p и a/p^2. Покажем теперь, что по двум главным делителям $n > k$ составное число a восстанавливается однозначно (откуда и следует требуемое). Если n кратно k, то выполнен второй случай, и тогда $a = n^2/k$. Иначе выполнен первый случай, и тогда $a = \text{НОК}(n, k)$.

11.2. На плоскости нарисованы графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, а также оси координат. Как циркулем и линейкой построить какую-нибудь прямую, которая касается графика синуса как выше оси абсцисс (Ox), так и ниже (и, возможно, имеет ещё несколько точек пересечения)? (*А. Кузнецов*)

Решение. Будем искать касательную, проходящую через начало координат. Касательная к графику синуса в точке $(x_0, \sin x_0)$ имеет уравнение $y = (x - x_0) \cdot \cos x_0 + \sin x_0$. Эта прямая проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $0 = -x_0 \cdot \cos x_0 + \sin x_0$, что равносильно $\operatorname{tg} x_0 = x_0$.

Осталось построить точку $(x_0, \sin x_0)$. Для этого (с помощью циркуля и линейки) построим биссектрису координатного угла, т.е. прямую $y = x$. Выберем её точку пересечения с графиком тангенса: $(x_0, \operatorname{tg} x_0)$, $x_0 \neq 0$. Далее, опуская из этой точки перпендикуляр на ось абсцисс и пересекая этот перпендикуляр с графиком синуса, получаем точку $(x_0, \sin x_0)$. Прямая, проходящая через начало координат и точку $(x_0, \sin x_0)$ будет касаться графика синуса в точке $(x_0, \sin x_0)$ по выбору точки x_0, а также в точке $(-x_0, -\sin x_0)$ из симметрии относительно начала координат. Эти точки лежат по разные стороны от оси абсцисс, что и требовалось.

11.3. На плоскости фиксирован остроугольный треугольник ABC с наибольшей стороной BC. Пусть PQ — произвольный диаметр его описанной окружности, причём точка P лежит на меньшей дуге AB, а точка Q — на меньшей дуге AC. Точки X, Y и Z — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямую AB, из точки Q на прямую AC и из точки A на прямую PQ. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора точек P и Q). (*И. Кухарчук, М. Дидин*)

Решение. Заметим, что $\angle PAQ = 90^\circ$, так как PQ — диаметр окружности (ABC). Пусть M и N — середины отрезков AP и AQ соответственно. Так как $\angle AZP = 90^\circ = \angle AXP$, то четырёхугольник $AZXP$ вписан в окружность с центром в точке M, откуда $\angle PZX = \angle PAB = 90^\circ - \angle BAQ = 90^\circ - \angle BPZ$. Следовательно, $XZ \perp BP$. Тогда, в силу сказанного выше, серединный перпендикуляр к отрезку XZ проходит через точку M и параллелен прямой BP, а потому на нём лежит и середина отрезка AB, обозначим её через D. Аналогично, если E — середина отрезка AC, то NE — серединный перпендикуляр к отрезку YZ. Таким образом, прямые MD и NE пересекаются в центре окружности (XYZ), обозначим его через O.

Тогда $\angle DOE = 180^\circ - \angle XZY = \angle PZX + \angle QZY = \angle PAB + \angle QAC = 90^\circ - \angle BAC$. Следовательно, точка O лежит на фиксированной окружности, проходящей через точки D и E, что и требовалось.

11.4. Дано натуральное число $n > 4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S, Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым ещё не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для

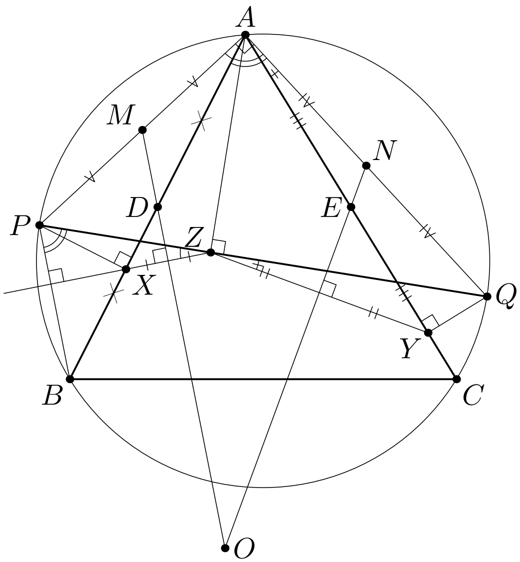

Рис. 7

какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k? (*А. Глебов, Д. Храмцов*)

Ответ. $k = 2n - 3$ при нечётном n, и $k = 2n - 4$ при чётном $n > 4$.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим шаг, на котором Василий помечает некоторый отрезок AB. Перед этим шагом из каждой из точек A и B выходит максимум по $n - 2$ отрезка, и они содержат максимум $2n - 4$ различных пометки. Значит, Василий точно сможет пометить этот отрезок числом, не превосходящим $2n - 3$. Итак, $k \leqslant 2n - 3$.

Если n чётно, эту оценку можно уточнить следующим образом. Назовём *маленьким* отрезок, помеченный единицей. Докажем, что в конце процесса из каждой точки будет выходить маленький отрезок; предположим противное. Точки, из которых выходят маленькие отрезки, разбиваются на пары точек, соединённых таким отрезком. Значит, есть хотя бы две точки X и Y, из которых не выходит маленьктх отрезков. Выходит, что когда Василий проводил отрезок XY, он должен был пометить его единицей — противоречие.

Значит, если отрезок AB не будет маленьким. то в конце процесса среди отрезков, выходящих из A и B, кроме AB, будут два маленьких отрезка. Значит, на этих отрезках будет максимум $2(n-2)-1=2n-5$ различных пометок. Следовательно, когдв Василий будет проводить отрезок AB, он сможет пометить его числом, не превосходящим $2n-4$, и $k \leqslant 2n-4$.

Пример. Осталось доказать, что Василий может достичь указанных значений k.

Лемма. *Если количество точек чётно и равно m, то Василий может пометить все отрезки между этими точками, использовав лишь числа от 1 до $m-1$. При этом из каждой точки будут выходить отрезки, помеченные всеми этими числами.*

Доказательство. Утверждение леммы не зависит от конкретного расположения точек, так что можно считать, что $m-1$ точек $A_1, \ldots, A_{m-1}$ расположены в вершинах правильного $(m-1)$-угольника, а оставшаяся точка — в его центре O.

Тогда все отрезки между этими точками можно разбить на $m-1$ множеств S_1, S_2, $\ldots$, S_{m-1} так, чтобы отрезки одного множества не имели общих концов. Например, в множество S_i можно включить отрезок OA_i и все отрезки, соединяющие пары вершин $(m-1)$-угольника и перпендикулярные OA_i. Из каждой точки выходит по отрезку каждого из множеств.

Теперь Василий может сначала пометить все отрезки множества S_1 числом 1, затем все отрезки второго множества числом 2, и т. д. □

Вернёмся к решению. Пусть n нечётно, и пусть A — отмеченная точка. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками, отличными от A, числами от 1 до $n-2$ согласно лемме. Затем он проведёт все $n-1$ отрезок из A; каждый отрезок AB ему придётся помечать числом, бо́льшим $n-2$, ибо из B уже выходят отрезки, помеченные всеми меньшими числами. Кроме того, все эти $n-1$ отрезок будут помечены разными числами, ибо у них есть общий конец. Следовательно, они будут помечены числами $n-1$, n, $\ldots$, $2n-3$, то есть Василий получит пометку $k=2n-3$.

Пусть теперь n чётно. Выберем две отмеченных точки A

и B; пусть C_1, C_2, $\ldots$, C_{n-2} — остальные отмеченные точки. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками C_i числами от 1 до $n-3$ согласно лемме, а также пометит отрезок AB числом 1. Затем он последовательно проводит отрезки AC_1, AC_2, $\ldots$, AC_{n-3}; поскольку в вершины C_i уже входят отрезки с пометками от 1 до $n-3$, новые отрезки будут помечены числами $n-2$, $n-1$, $\ldots$, $2n-6$ соответственно. Далее Василий проводит отрезки BC_{n-3}, BC_2, BC_3, $\ldots$, BC_{n-4}; аналогично, он пометит их числами $n-2$, $n-1$, $\ldots$, $2n-6$ соответственно.

Теперь в вершины A и B уже входят отрезки со всеми пометками от $n-2$ до $2n-6$, а в вершину C_{n-2} — со всеми пометками от 1 до $n-3$. Значит, когда Василий проводит отрезки AC_{n-2} и BC_{n-2}, первый будет помечен числом $2n-5$, а второй — числом $2n-4$ (ибо имеет общий конец с предыдущим). Значит, Василий добился появления числа $k = 2n-4$.

Критерии оценивания 11 класса		
11.1	не более 1 балла	(A) Задача решена в предположении, что меньший главный делитель - это число, деленное на простое
	не более 4 баллов	(B) В работе считается, что вид второго главного делителя зависит от степени вхождения наименьшего простого
	не более 3 баллов	(C1) Не разобран хотя бы один существенный случай вида второго главного делителя
	не более 3 баллов	(C2) В решении с алгоритмом восставления числа, не объяснено в какой ситуации мы находимся. Этот критерий аналогичен критерию (C1)
11.2		Специальных критериев нет
11.3	0 баллов	(N1) Недоведенный счет (координатный, тригонометрический, комплексный).
	0 баллов	(N2) Замечено, что четырехугольники APXZ и AQYZ вписаны, посчитаны некоторые углы на исходной картинке (в частности, доказано, что BP перпендикулярно XZ).
	0 баллов	(N3) Переформулировка задачи с помощью инверсии.
	1 балл	(A) Центр окружности (XYZ) построен как точка пересечения серединных перпендикуляров к XZ и YZ и доказано, что эти серединные перпендикуляры проходят через середины AP и AQ.
11.4	0 баллов	(N1) оценка сверху 2n-3 для нечётного (или для любого) n
	0 баллов	(N2) разобрано конечное количество случаев
	2 балла	(A) оценка сверху 2n-4 для чётного n
	1 балл	(A0) доказано, что рёбра цвета 1 выходят из всех вершин при чётном n (или: из всех вершин кроме быть может одной при произвольном n). Не суммируется с критерием A.
	2 балла	(B) пример на 2n-3 для нечётного n
	1 балл	(B0) пример на 2n-3, работающий при бесконечно многих, но не всех, нечётных n
	2 балла	(C) пример на 2n-4 для чётного n
	-1 балл	(M) Неверно доказано, что рёбра полного графа на 2n вершинах разбиваются на 2n-1 совершенных паросочетаний
	Баллы за пункты max(A,A0), max(B,B0), C, D суммируются	
11.5	5 баллов	(A) Приведен верный пример, но отсутствуют какие-либо комментарии, его объясняющие
	1 балл	(B) Верно доказано, что в наборе, удовлетворяющем условию, не могут быть нули, но пример не построен
11.6	Складываются баллы только из разных групп (A, B, C)	
	0 баллов	(A1) В случае четного n доказано, что для некоторого расположения лучей удастся отметить не более n точек.
	0 баллов	(A2) В случае четного n доказано, что при любом расположении лучей удастся отметить n точек, лежащих на одной сфере
	1 балл	(A) A1+A2
	1 балл	(B) В случае нечетного n доказано, что для некоторого расположения лучей удастся отметить не более n точек.
	4 балла	(C) В случае нечетного n доказано, что при любом расположении лучей удастся отметить n точек, лежащих на одной сфере
	1 балл	(C1) В случае нечетного n выбрано полупространство, в которое направлены хотя бы половина лучей, конструкция искомой сферы не приведена (например, только заявлено, что такая сфера существует)
	2 балла	(C2) В случае нечетного n выбрано полупространство, в которое направлены хотя бы половина лучей, про конструкцию искомой сферы указано лишь то, лишь то, что она должна лежать в выбранном полупространстве и иметь достаточно большой радиус
	2 балла	(C3) В случае нечетного n неверно построено подпространство, в которое направлены хотя бы половина лучей, но верно описана конструкция сферы в таком полупространстве
	-1 балл	(M1) При выборе полупространства утерян случай параллельности разделяющей плоскости одному из лучей
	-2 балла	(M2) Ошибки в конструкции сферы, касающейся разделяющей плоскости: используются неверные неравенства, отмечаются точки пересечения лучей, не лежащих в одной плоскости и т.д.
11.7	Складываются баллы только из разных групп	
	1 балл	(A) ограничено число квадратов, получаемых вычёркиванием цифры из второй половины
	1 балл	(B) разобран случай N, взаимно простого с 10
	0 баллов	(N) редукция к случаю N, не кратного 10
11.8	0 баллов	(A) Доказано, что вершины красных и синих треугольников – изогонально сопряжённые точки
	0 баллов	(B) Переформулировка с помощью теоремы Кэзи или инверсии (в том числе композиции инверсии и симметрии)