

11 класс

Первый день

- 11.1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n . Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b . Докажите, что $a = b$.
- 11.2. На плоскости нарисованы графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, а также оси координат. Как циркулем и линейкой построить какую-нибудь прямую, которая касается графика синуса как выше оси абсцисс (Ox), так и ниже (и, возможно, имеет ещё несколько точек пересечения)?
- 11.3. На плоскости фиксирован остроугольный треугольник ABC с наибольшей стороной BC . Пусть PQ — произвольный диаметр его описанной окружности, причём точка P лежит на меньшей дуге AB , а точка Q — на меньшей дуге AC . Точки X , Y и Z — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямую AB , из точки Q на прямую AC и из точки A на прямую PQ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора точек P и Q).
- 11.4. Дано натуральное число $n > 4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S , Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым ещё не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k ?