Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике

Решения задач

Москва, декабрь 2021

В 7 и 8 классах участникам отводилось 90 минут на решение олимпиады, а в 9, 10 и 11 классах — 120 минут.

Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера приведена только одна версия задачи с решением.

Содержание

8 класс

Задача 8.1. Числа x, y, z таковы, что $x \in [-3, 7]$, $y \in [-2, 5]$, $z \in [-5, 3]$.

(а) *(1 балл)* Найдите наименьшее возможное значение величины $x^2 + y^2$.

(б) *(3 балла)* Найдите наименьшее возможное значение величины $xyz - z^2$.

Ответ:

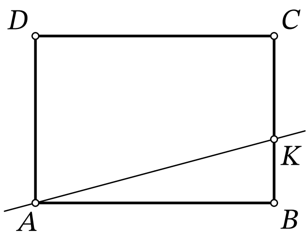
(а) *(1 балл)* 0.

(б) *(3 балла)* -200.

Решение. **(а)** Заметим, что $x^2 \geqslant 0$ и $y^2 \geqslant 0$, поэтому $x^2 + y^2 \geqslant 0$. Значение $x^2 + y^2 = 0$ возможно при $x = 0, y = 0$.

(б) Заметим, что $|xyz| = |x||y||z| \leqslant 7 \cdot 5 \cdot 5$ и $z^2 \leqslant 5^2$, поэтому $xyz - z^2 \geqslant -7 \cdot 5 \cdot 5 - 5^2 = -200$. Значение $xyz - z^2 = 200$ возможно при $x = 7, y = 5, z = -5$. □

Задача 8.2. Дан прямоугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через вершину A и точку K на стороне BC, делит весь прямоугольник на две части, площадь одной из которых в 5 раз меньше площади другой. Найдите длину отрезка KC, если $AD = 60$.



Ответ: 40.

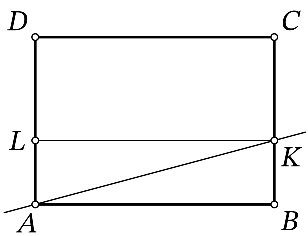


Рис. 1: к решению задачи 8.2

Решение. Проведём через K прямую, параллельную AB. Пусть она пересекает сторону AD в точке L (рис. 1), тогда $ABKL$ и $DCKL$ — прямоугольники. Пусть $S_{ABK} = S$, тогда $S_{KLA} = S$. Очевидно, что $S_{AKCD} = 5S$ и $S_{LKCD} = 5S - S = 4S$.

Отношение площадей прямоугольников $ABKL$ и $DCKL$ с общей стороной KL равно отношению сторон BK и CK. Следовательно, $\frac{BK}{CK} = \frac{2S}{4S} = \frac{1}{2}$, откуда получаем $KC = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40$. □

Задача 8.3. В ряд лежат 127 шариков, каждый из которых либо красный, либо зелёный, либо синий. Известно, что

- есть хотя бы один красный, хотя бы один зелёный и хотя бы один синий шарик;
- слева от каждого синего шарика лежит красный шарик;
- справа от каждого зелёного шарика лежит красный шарик.

(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество красных шариков может лежать в ряду?

(б) *(3 балла)* Какое наименьшее количество красных шариков может лежать в ряду?

Ответ:

(а) *(1 балл)* 125.

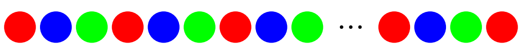
(б) *(3 балла)* 43.

Решение. **(а)** Среди 127 шариков есть хотя бы 1 зелёный и хотя бы 1 синий, поэтому красных шариков не более 125. Заметим также, что их может быть ровно 125, если самый левый шарик — синий, самый правый шарик — зелёный, а все 125 шариков между ними — красные.

(б) Предположим, найдутся 3 подряд идущих шарика, среди которых нет красных шариков. Если средний шарик из них — синий, то слева от него лежит не красный, а если средний шарик — зелёный, то справа от него лежит не красный. Противоречие, следовательно, среди любых 3 подряд идущих шариков есть хотя бы 1 красный.

Предположим, среди двух самых левых шариков нет ни одного красного. Если самый левый шарик из них — зелёный, то слева от него нет красного шарика, а если самый левый шарик — синий, то справа от него не красный. Противоречие, следовательно, среди 2 самых левых шариков есть хотя бы 1 красный. Аналогично среди 2 самых правых шариков есть хотя бы 1 красный.

Все шарики, кроме двух самых левых и двух самых правых, разбиваются на $\frac{127-4}{3} = 41$ тройку подряд идущих. Следовательно, всего красных шариков не меньше $41+1+1 = 43$. Ровно 43 красных шарика может быть, например, так: КСЗКСЗКСЗ...КСЗК.



$\square$

Задача 8.4. Ваня выписал в ряд без пропусков друг за другом все натуральные числа от 1 до N в следующем порядке:

$$1 \quad N \quad 2 \quad N-1 \quad 3 \quad N-2\ldots$$

Например, при $N = 5$ получилось бы 15243, а при $N = 10$ получилось бы 11029384756.

При каком наименьшем N в такой записи встретится последовательность цифр 301?

Ответ: 38.

Решение. Заметим, что в нашей последовательности сумма двух подряд идущих чисел равна $N + 1$ или $N + 2$.

Рассмотрим последовательность цифр 301. Есть четыре случая:

- цифры этой последовательности принадлежат одному числу, тогда $N \geqslant 301$, но мы покажем, что N может быть и меньше;
- цифры этой последовательности принадлежат трём разным числам: одно заканчивается на 3, другое начинается на 1 и число 0 посередине, но в нашем ряду только натуральные числа, поэтому этот случай невозможен;
- цифры этой последовательности принадлежат двум разным числам: одно заканчивается на 3, другое начинается на 01, но в нашем ряду только натуральные числа, поэтому этот случай невозможен;
- цифры этой последовательности принадлежат двум разным числам: одно заканчивается на 30, другое начинается на 1.

Последний случай рассмотрим более детально. Число, которое начинается на 1, не может равняться 1, так как в нашей последовательности перед 1 нет других чисел.

Таким образом, второе число не меньше 10, а предыдущее число не меньше 30, то есть сумма наших двух подряд идущих чисел не меньше 40. Но она равна $N + 1$ или $N + 2$, поэтому $N \leqslant 38$.

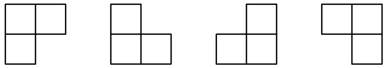
Теперь приведём пример для $N = 38$.

$$1\ 38\ 2\ 37\ 3\ 36\ 4\ 35\ 5\ 34\ 6\ 33\ 7\ 32\ 8\ 31\ 9\ \underbrace{30\ 1}0\ 29\ldots$$

$\square$

Задача 8.5. Клетчатый прямоугольник площади S таков, что:

- его целиком можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники 1×13;
- его целиком можно разрезать по линиям сетки на трёхклеточные уголки (примеры уголков изображены на рисунке ниже);



- не существует клетчатого прямоугольника меньшей площади, удовлетворяющего двум предыдущим условиям.

(а) *(2 балла)* Найдите S.

(б) *(2 балла)* Чему может быть равен периметр этого прямоугольника? Укажите все возможные варианты.

Ответ:

(а) *(2 балла)* 78.

(б) *(2 балла)* 38, 58, 82.

Решение. **(а)** Из условия следует, что S делится на 39. Докажем, что $S \neq 39$. Очевидно, что прямоугольник 1×39 не подходит.

Рассмотрим прямоугольник 3×13 (3 строки, 13 столбцов). Предположим, что его можно разрезать на трёхклеточные уголки. Тогда клетки первого столбца принадлежат в точности двум уголкам. При этом клетки второго столбца также полностью покрываются теми же сами двумя уголками.

Отрежем первые два столбца (так как они уже разрезаны на два уголка). Повторим аналогичное рассуждение со следующей парой столбцов, затем со следующей, и так далее.

В итоге останется один последний столбец, который не удастся разрезать на уголки. Противоречие.

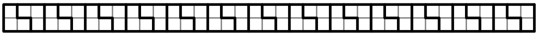
Для $S = 78$ нетрудно построить пример — см. следующий пункт.

(б) Есть несколько способов представить $S = 78$ в виде произведения двух натуральных чисел:

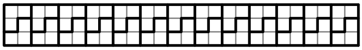
- 1×78;
- 2×39;
- 3×26;
- 6×13.

Первый случай, очевидно, не подходит. В трёх остальных случаях построим примеры разбиений на уголки (разбиение на прямоугольники 1×13 очевидно). Ответ в задаче — периметры трёх соответствующих прямоугольников.

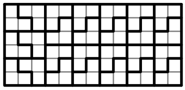
Случай 2×39 **(2 строки, 39 столбцов)**. Разрежем всю конструкцию на 13 горизонтальных прямоугольников 2×3. Затем каждый из них разрежем на два уголка.



Случай 3×26 **(3 строки, 26 столбцов)**. Разрежем всю конструкцию на 13 вертикальных прямоугольников 2×3. Затем каждый из них разрежем на два уголка.



Случай 6×13 **(6 строк, 13 столбцов)**. Отрежем прямоугольник, образованный первыми тремя столбцами. Далее разрежем его на 3 горизонтальных прямоугольника 2×3. Оставшийся прямоугольник 6×10 нетрудно разрезать на 10 вертикальных прямоугольников 2×3. Затем каждый из них разрежем на два уголка.



□

Задача 8.6. Числа 13, 14, 15, … , 25 покрашены в пять цветов: одно чёрное число, три красных, три синих, три жёлтых, три зелёных.

Известно, что:

- все четыре суммы трёх одноцветных чисел равны;
- число 13 — красное, 15 — жёлтое, 23 — синее.

(а) *(1 балл)* Найдите чёрное число.

(б) *(3 балла)* Найдите три зелёных числа.

Ответ:

(а) *(1 балл)* 19.

(б) *(3 балла)* 14, 21, 22.

Решение. **(а)** Посчитаем сумму чисел от 13 до 25:

$$13 + 14 + \ldots + 25 = \frac{(13 + 25) \cdot 13}{2} = 247.$$

Сумма всех чисел, кроме чёрного, должна делиться на 4. Поскольку 247 даёт остаток 3 при делении на 4, то для чёрного числа есть ровно три варианта: 15, 19, 23. Так как 15 — жёлтое число, а 23 — синее, то 19 — точно чёрное.

(б) Поймём, что нам уже известно про числа:

- чёрное число: 19;
- красное число: 13;

- жёлтое число: 15;
- синее число: 23;
- зелёные числа нам пока неизвестны;
- числа, у которых ещё не определён цвет: 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25.

Ясно, что сумма одноцветных (красных/жёлтых/зелёных/синих) чисел равна $\frac{247-19}{4} = 57$.

Из условия мы знаем, что число 13 — красное, поэтому сумма остальных красных чисел равна $57 - 13 = 44$. Есть единственный способ, как можно 44 представить в виде суммы двух чисел с ещё не определённым цветом: $24 + 20$. Значит, числа 24 и 20 — красные.

Поймём, что нам теперь известно про числа:

- чёрное число: 19;
- красные числа: 13, 20, 24;
- жёлтое число: 15;
- синее число: 23;
- зелёные числа нам пока неизвестны;
- числа, у которых ещё не определён цвет: 14, 16, 17, 18, 21, 22, 25.

Из условия мы знаем, что число 15 — жёлтое, поэтому сумма остальных жёлтых чисел равна $57 - 15 = 42$. Есть единственный способ, как можно 42 представить в виде суммы двух чисел с ещё не определённым цветом: $25 + 17$. Значит, числа 25 и 17 — жёлтые.

Получаем следующее:

- чёрное число: 19;
- красные число: 13, 20, 24;
- жёлтые числа: 15, 17, 25;
- синее число: 23;
- зелёные числа нам пока неизвестны;
- числа, у которых ещё не определён цвет: 14, 16, 18, 21, 22.

Число 14 точно не синее, так как иначе оставшееся синее число равнялось бы $57-23-14 = 20$, поэтому число 14 — зелёное. Сумма оставшихся зелёных чисел равна $57 - 14 = 43$, поэтому их определить нетрудно — это 21 и 22. Оставшиеся числа 16 и 18 —точно синие.

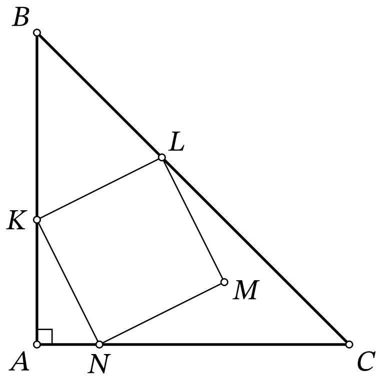
Таким образом, мы однозначно восстановили раскраску всех чисел:

- чёрное число: 19;
- красные число: 13, 20, 24;

- жёлтые числа: 15, 17, 25;
- синие числа: 16, 18, 23;
- зелёные числа: 14, 21, 22. □

Задача 8.7. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом A. Квадрат $KLMN$ расположен, как на рисунке: точки K, L, N лежат на сторонах AB, BC, AC соответственно, а точка M расположена внутри треугольника ABC.

Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AK = 7$, $AN = 3$.



Ответ: 17.

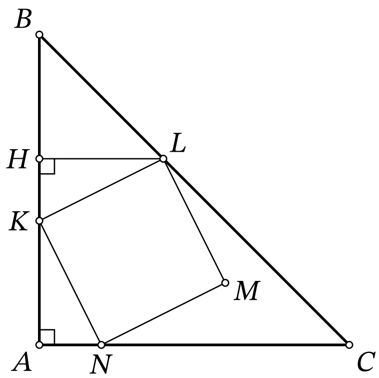


Рис. 2: к решению задачи 8.7

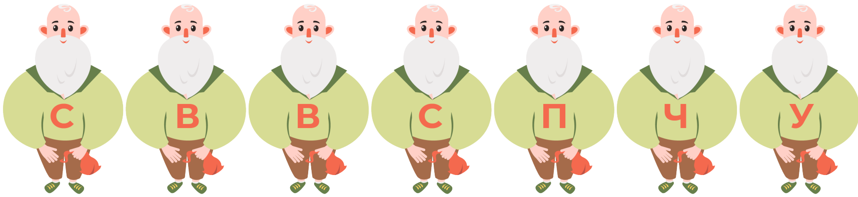
Решение. Отметим на отрезке BK точку H такую, что $LH \perp BK$ (рис. 2). Треугольник BHL является прямоугольным равнобедренным, $HB = HL$. Заметим, что $\angle LKH = 90° -$

$\angle AKN = \angle ANK$, а также $KL = KN$. Прямоугольные треугольники LKH и KNA равны по острому углу и гипотенузе, поэтому $KH = AN = 3$ и $LH = AK = 7$. Следовательно,

$$AC = AB = AK + KH + HB = 7 + 3 + 7 = 17. \qquad \square$$

Задача 8.8. В ряд встали 7 гномов: Весельчак, Ворчун, Простачок, Скромник, Соня, Умник и Чихун. На каждом из них кофта с первой буквой его имени и колпак. У некоторых из них сегодня плохое настроение, и они при любой просьбе делают всё наоборот (остальные гномы делают то, что их попросят).

Белоснежка попросила снять колпак тех, рядом с которыми стоит хотя бы один гном с плохим настроением. Получилось так, как изображено на следующем рисунке: колпак сняли все гномы.



Удивившись, Белоснежка переставила гномов, всем надела колпаки и повторила свою просьбу. Получилось так, как изображено на следующем рисунке: колпак снял только Простачок.

У кого из гномов сегодня плохое настроение?

Ответ: Скромник, Соня и Чихун.

Решение. Рассмотрим Простачка во второй ситуации. Если у него плохое настроение, то он снял колпак, так как у его соседей хорошее настроение. Но при этом его соседи колпаки не сняли. Противоречие, следовательно, у Простачка в этот день хорошее настроение.

Посмотрим на тройку гномов слева от Простачка во второй ситуации.

- Если у центрального гнома (из этих троих) хорошее настроение, то раз он не снял колпак, то и у его соседей тоже хорошее настроение.
- Если у центрального гнома (из этих троих) плохое настроение, то раз он не снял колпак, то и у хотя бы одного его соседа тоже плохое настроение.

Аналогичные рассуждения выполняются и для правой тройки гномов. Таким образом, в каждой из этих троек у всех гномов одинаковое настроение. То есть плохое настроение либо у 0, либо у 3, либо у 6 гномов.

Теперь рассмотрим первую ситуацию. Так как все гномы сняли колпаки, то у кого-то из них точно плохое настроение, поэтому случай с 0 гномов с плохим настроением отпадает. Если же у 6 гномов плохое настроение, то какие-то два из них в первой ситуации стоят рядом, чего быть не может, так как они оба сняли колпаки.

Методом исключения мы понимаем, что ровно у 3 гномов плохое настроение. Теперь осталось лишь заметить, что Весельчак и Ворчун в первой ситуации стоят рядом, поэтому у них не может быть одновременно плохое настроение. Таким образом, в первой тройке гномов во второй ситуации у всех хорошее настроение.

Следовательно, плохое настроение у Скромника, Сони и Чихуна. □