Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике

Решения задач

Москва, декабрь 2021

В 7 и 8 классах участникам отводилось 90 минут на решение олимпиады, а в 9, 10 и 11 классах — 120 минут.

Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера приведена только одна версия задачи с решением.

Содержание

9 класс

Задача 9.1. Для натурального числа a произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a$ обозначается как $a!$.

(а) *(2 балла)* Найдите наименьшее натуральное число m такое, что $m!$ делится на $23m$.

(б) *(2 балла)* Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n!$ делится на $33n$.

Ответ:

(а) *(2 балла)* 24.

(б) *(2 балла)* 12.

Решение. **(а)** Условие равносильно тому, что $(m-1)!$ делится на 23. Поскольку число 23 — простое, хотя бы одно из чисел $1, 2, \ldots, m-1$ делится на 23, поэтому $m-1 \geqslant 23$ и $m \geqslant 24$. Ясно, что $m = 24$ подходит, ведь в этом случае $\frac{24!}{23 \cdot 24} = 22!$.

(б) Условие равносильно тому, что $(n-1)!$ делится на $33 = 3 \cdot 11$. Поскольку числа 3 и 11 — простые, хотя бы одно из чисел $1, 2, \ldots, n-1$ делится на 11, поэтому $n-1 \geqslant 11$ и $n \geqslant 12$. Ясно, что $n = 12$ подходит, ведь в этом случае $\frac{12!}{33 \cdot 12} = \frac{10!}{3} = 8! \cdot 3 \cdot 10$. □

Задача 9.2. В четырёх классах школы учится более 70 детей, все они пришли на собрание параллели (других детей на собрании не было).

Каждую пришедшую девочку спросили: «Сколько пришло человек из твоего класса, включая тебя?»

Каждого пришедшего мальчика спросили: «Сколько пришло мальчиков из твоего класса, включая тебя?»

Среди ответов встретились числа 7, 9, 10, 12, 15, 16, 19 и 21 (все дети ответили верно).

(а) *(1 балл)* Сколько детей учится в самом большом классе параллели?

(б) *(3 балла)* Сколько девочек пришло на собрание параллели?

Ответ:

(а) *(1 балл)* 21 ученик.

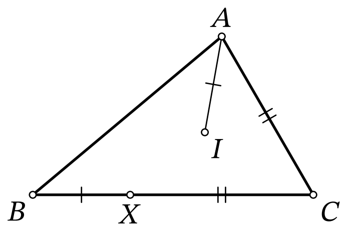
(б) *(3 балла)* 33 девочки.

Решение. **(а)** Поскольку все 8 перечисленных в условии чисел различны, ровно 4 из них означают численность детей в классах, а другие 4 — численность мальчиков в классах. Число 21, самое большое из перечисленных, не может быть численностью мальчиков какого-то класса (иначе нет числа, соответствующего количеству учеников этого класса). Поэтому в самом большом классе учится 21 ребёнок.

(б) Получается, что количество учеников во втором по размеру классе не превосходит 19, в третьем по размеру не превосходит 16, в четвёртом не превосходит 15. Тогда общее количество учеников не превосходит $15+16+19+21 = 71$, а по условию задачи на собрание параллели пришло более 70 учеников. Отсюда следует, что численности классов — в точности 15, 16, 19, 21, а общее количество учеников в них — 71.

Тогда общее количество мальчиков в классах равно $7+9+10+12 = 38$, а общее количество девочек равно $71 - 38 = 33$. □

Задача 9.3. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. На стороне BC отметили точку X. Оказалось, что $AI = BX$, $AC = CX$, $\angle ABC = 42°$.



(а) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол BIX?

(б) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол BCA?

Ответ:

(а) *(2 балла)* 21°.

(б) *(2 балла)* 54°.

Решение. **(а)** Заметим, что треугольники XIC и AIC равны (IC — общая сторона, $XC = CA$, $\angle XCI = \angle ACI$ по условию; рис. 3). Тогда $XI = AI = BX$, и треугольник BXI — равнобедренный. Следовательно,

$$\angle BIX = \angle IBX = \frac{\angle ABC}{2} = 21^\circ.$$

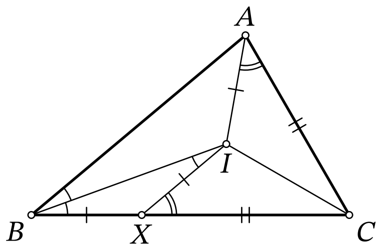


Рис. 3: к решению задачи 9.3

(б) Получается, что $\angle ABI = \angle BIX = 21^\circ$, т. е. $AB \parallel XI$. Осталось найти углы BAC и BCA.

$$\angle BAC = 2\angle IAC = 2\angle IXC = 2\angle ABC = 84^\circ,$$
$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 54^\circ. \qquad \square$$

Задача 9.4. Фома и Ерёма ехали по прямой дороге в Москву на повозке с постоянной скоростью.

- В 12:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «82».
- В 13:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «71».
- В 15:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «46».

Известно, что Ерёма каждый раз округлял расстояние до ближайшего целого, а если таких было два — то до любого на свой выбор.

В 16:00 Фома снова спросил: «Сколько вёрст до Москвы?» В этот раз Ерёма уже дал точный ответ, не округляя его. Что ответил Ерёма?

Ответ: 34,5 версты.

Решение. Из ответов Ерёмы мы понимаем, что

- в 12:00 до Москвы оставалось от 81,5 до 82,5 вёрст;
- в 13:00 до Москвы оставалось от 70,5 до 71,5 вёрст;
- в 15:00 до Москвы оставалось от 45,5 до 46,5 вёрст.

То есть Фома и Ерёма

- с 12:00 до 13:00 проехали от 10 до 12 вёрст;
- с 13:00 до 15:00 проехали от 24 до 26 вёрст.

Но так как скорость повозки постоянна, она определяется однозначно и равняется 12 вёрст в час (это максимально возможная скорость с 12:00 до 13:00 и минимально возможная скорость с 13:00 до 15:00). Кроме этого, мы получаем, что

- в 12:00 до Москвы оставалось 82,5 версты;
- в 13:00 до Москвы оставалось 70,5 вёрст;
- в 15:00 до Москвы оставалось 46,5 вёрст.

Таким образом, в 16:00 до Москвы оставалось 34,5 версты. □

Задача 9.5. Про действительные ненулевые числа a, b, c известно, что

$$a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab.$$

(а) *(1 балл)* Какие положительные значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b}?$$

Укажите все возможные варианты. Если выражение не может принимать положительные значения, то в качестве ответа напишите 0.

(б) *(3 балла)* Какие отрицательные значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b}?$$

Укажите все возможные варианты. Если выражение не может принимать отрицательные значения, то в качестве ответа напишите 0.

Ответ:

(а) *(1 балл)* 7/2.

(б) *(3 балла)* -7.

Решение. **Первый случай:** все числа a, b, c равны друг другу.

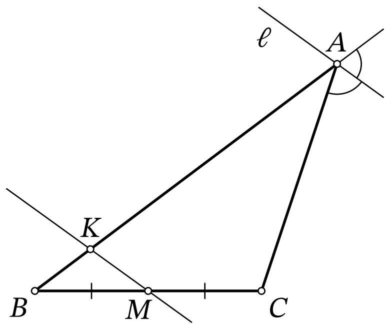
Тогда
$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}.$$

Второй случай: среди a, b, c есть различные числа.

Не нарушая общности, $a \neq b$, тогда
$$a^2 - bc = b^2 - ac;$$
$$a^2 - b^2 = bc - ac;$$
$$(a-b)(a+b) = -c(a-b);$$
$$a + b = -c;$$
$$a + b + c = 0.$$

Этот же результат получится, если $a \neq c$ или $b \neq c$. То есть, если среди a, b, c есть два различных числа, то сумма всех трёх чисел равна нулю. Получаем, что
$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b} = \frac{a}{-a} + \frac{2b}{-b} + \frac{4c}{-c} = -7. \qquad \square$$

Задача 9.6. Дан треугольник ABC, точка M — середина стороны BC. Пусть ℓ — биссектриса внешнего угла A треугольника ABC. Прямая, проходящая через M и параллельная ℓ, пересекает сторону AB в точке K. Найдите длину отрезка AK, если $AB = 23$ и $AC = 8$.



Ответ: 15,5.

Решение. Проведём через точку C прямую ℓ_1 параллельно прямой ℓ (рис. 4). Пусть X — точка пересечения прямой ℓ_1 и AB.

Заметим, что $\angle AXC = \angle ACX$, так как оба этих угла равны половине внешнего угла A, поэтому $AX = AC = 8$.

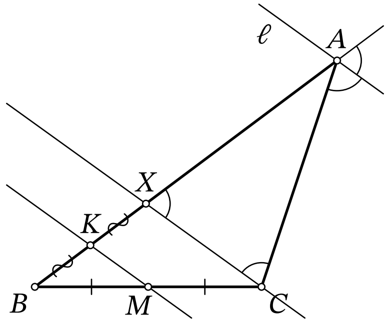


Рис. 4: к решению задачи 9.6

В треугольнике BCX отрезок MK является средней линией, поэтому

$$AK = AX + XK = 8 + \frac{BX}{2} = 8 + \frac{AB - AX}{2} = 8 + \frac{23 - 8}{2} = 15{,}5. \qquad \square$$

Задача 9.7. На доску выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 57$. Какое наибольшее количество чисел среди них можно выбрать так, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ровно в 2,5 раза?

Ответ: 48.

Решение. Рассмотрим последовательности натуральных чисел, удовлетворяющие следующему набору условий: в каждой последовательности

- каждое число не превосходит 57;
- есть хотя бы два числа, и все они идут по возрастанию;
- каждое следующее число в $2,5$ раза больше предыдущего.

Выпишем их все.

- 2, 5
- 4, 10, 25
- 6, 15
- 8, 20, 50
- 12, 30
- 14, 35
- 16, 40
- 18, 45

- 22, 55

Заметим, что в каждой из этих девяти последовательностей должно быть хотя бы одно невыбранное число. Тогда выбранных чисел не более, чем $57 - 9 = 48$.

Пример, когда выбранных чисел ровно 48, построить несложно: достаточно выбрать все числа от 1 до 57, кроме вторых чисел из перечисленных выше девяти последовательностей. □

Задача 9.8. На плоскости отмечено 36 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары отмеченных точек соединены отрезком так, что из каждой отмеченной точки выходит не более 3 отрезков.

Какое наибольшее количество различных замкнутых 4-звенных ломаных может получиться?

Вершинами ломаной могут быть только отмеченные точки, а звеньями — только проведённые отрезки. Неважно, где у ломаной начало и как она ориентирована: например, если для некоторых 4 отмеченных точек A, B, C, D проведены отрезки AB, BC, CD, DA, то $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $ADCB$, $BADC$, $CBAD$, $DCBA$ — это одна и та же ломаная.

Ответ: 54.

Решение. Для начала докажем, что ломаных не больше 54.

Рассмотрим конструкцию «галочка», состоящую из трёх точек A, B и C, а также двух отрезков AB и AC (при этом отрезок BC может как присутствовать, так и не присутствовать; точку A будем называть *вершиной* галочки). Так как из B и C выходит ещё не более чем по два отрезка, то каждая галочка может содержаться не более, чем в двух 4-звенных ломаных (рис. 5a). При этом точка A является вершиной не более чем трёх галочек, поэтому она находится не более чем в шести 4-звенных ломаных.

(a) (b)

Рис. 5: к решению задачи 9.8

Теперь оценим количество ломаных. Всего точек 36, каждая находится не более чем в 6 ломаных, при этом в каждой ломаной участвуют ровно 4 точки. Таким образом, ломаных не больше чем $36 \cdot 6 / 4 = 54$.

Теперь докажем, что ломаных могло быть ровно 54.

Опишем конструкцию, состоящую из 6 точек: $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ (рис. 5b). Между ними проведём отрезки так, чтобы для всех $i, j \in \{1, 2, 3\}$ точка A_i была соединена с точкой B_j (таким образом, из каждой точки выходит ровно 3 отрезка). Тогда любая пара вершин A_{i_1}, A_{i_2} вместе с любой парой вершин B_{j_1}, B_{j_2} будет образовывать 4-звенную ломаную. Таким образом, ломаных будет ровно 9. Для построения примера, требующегося в задаче, достаточно рассмотреть 6 таких конструкций, все точки которых различны. $\square$