Материалы для проведения регионального этапа

XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Второй день

4–5 февраля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **4 февраля 2022 г.** (I тур) и **5 февраля 2022 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2021–2022 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.6. На доске написаны три последовательных нечётных числа. Может ли сумма остатков от деления этих трёх чисел на 2022 равняться некоторому простому числу? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Решение. Пусть r — остаток меньшего из данных нечетных чисел при делении на 2022, так что r — некоторое нечётное число из множества $\{1, 3, 5, \ldots, 2021\}$. Если $r \leqslant 2017$, то два других остатка — $r + 2$ и $r + 4$, так что сумма остатков равна $r + (r + 2) + (r + 4) = 3(r + 2)$ — это число составное, так как делится на 3 и больше 3. Отдельно рассмотрим случаи $r = 2019$ и $r = 2021$. В первом случае остатки данных чисел равны $2019, 2021$ и 1. Во втором случае остатки данных чисел равны $2021, 1$ и 3. В обоих случаях сумма остатков делится на 3 и больше 3.

Замечание 1. Во всех трёх случаях сумма трёх остатков равна $3(r + 2) - 2022k$, где $k \in \{0, 1, 2\}$.

Замечание 2. Если в условии задачи 2022 заменить на другое число (не кратное 3), утверждение задачи может стать неверным. Например, сумма остатков чисел 19, 21, 23 при делении на 20 равна $19 + 1 + 3 = 23$ — простое число.

Комментарий. Если в решении упущен случай «перехода через 2022» (т.е. хотя бы один из случаев троек остатков $2019, 2021, 1$ и $2021, 1, 3$) — ставится 4 балла.

Если в верном решении получено, что сумма остатков делится на 3, но явно не оговорено, что она больше 3 (скажем, получена формула $3(r + 2)$ в случае $r \leqslant 2017$) — баллы не снижаются.

10.7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 2\angle B$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что $AD + AE = BE$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим $\angle ABC = \alpha$, тогда по условию $\angle DAB = 2\alpha$. На продолжении отрезка AB за точку A отметим точку F так, что $AD = AF$. Тогда треугольник AFD равнобедренный, и его углы при основании равны. Так как $\angle FAD = 180^\circ - 2\alpha$, то $\angle AFD = \angle ADF = \alpha$.

Поскольку четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то

$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle ADF$. Следовательно, точки C, D и F лежат на одной прямой. Тогда $\angle CFB = \alpha = \angle CBF$, поэтому треугольник FCB равнобедренный. Значит, его биссектриса CE совпадает с медианой. Итого, $BE = EF = AD + AE$, что и требовалось.

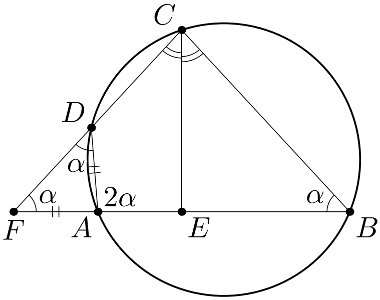

Рис. 2

Замечание. Существует и такая вариация решения. Обозначим $\angle ABC = \alpha$, тогда по условию $\angle DAB = 2\alpha$. Из вписанности четырёхугольника $ABCD$ имеем $\angle BCD = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда $\angle BCD + \angle ABC = 180^\circ - \alpha$, лучи BA и CD пересекаются в некоторой точке F, и при этом $\angle BFC = \alpha$. Поскольку $\angle CFB = \alpha = \angle CBF$, треугольник FCB равнобедренный. Значит, его биссектриса CE совпадает с медианой, поэтому $BE = EF = AF + AE$.

Для завершения решения остаётся показать, что $AF = AD$. Это следует из вписанности четырёхугольника $ABCD$, поскольку $\angle ADF = \angle CBF = \alpha$. Значит, треугольник AFD равнобедренный с равными углами $\angle AFD = \angle ADF = \alpha$.

Комментарий. Построена точка F из решения (она может быть определена разными способами: как точка с условием $AF = AD$ на продолжении отрезка AB, как пересечение CD и AB, и т.д.) — 2 балла.

10.8. На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно?

(*Е. Бакаев*)

Ответ. 180.

Первое решение. *Пример.* Покажем сначала, что при $N = 180$ требуемое возможно. Отметим на окружности 180 точек, разбивающих её на 180 равных дуг величиной по 2° каждая. Величина любой дуги с концами в двух из отмеченных точек выражается чётным числом градусов, поэтому величина любого вписанного в окружность угла, образованного тремя отмеченными точками, выражается натуральным числом градусов. Следовательно, 180 отмеченных точек удовлетворяют условию задачи.

Оценка. Осталось доказать, что $N \leqslant 180$. Любые три отмеченных точки образуют треугольник, поэтому не могут лежать на одной прямой. Считая отмеченные точки расположенными на координатной плоскости, обозначим через A любую из них с максимальной ординатой. Среди оставшихся выберем точки B и C такие, что угол BAC максимален.

Из условия задачи следует, что в треугольнике ABC величины углов ABC и ACB не меньше 1°, поэтому величина угла BAC не больше 178°. Ввиду выбора точек B и C остальные $N-3$ отмеченные точки лежат строго внутри угла BAC, и каждый луч с началом в точке A содержит не больше одной из них. Проведя через каждую отмеченную точку внутри угла BAC луч с началом в точке A, получим $N-3$ различных луча, делящих $\angle BAC$ на $N-2$ угла. Если $N-2 > 178$, то хотя бы один из этих углов имеет величину, меньшую 1°, и является углом некоторого треугольника с вершинами в трёх отмеченных точках, что противоречит условию задачи. Следовательно, $N-2 \leqslant 178$, то есть $N \leqslant 180$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Описать выбор используемой в решении точки A можно также следующими способами.

1. Рассмотрим вершину A *выпуклой оболочки* системы отмеченных точек. В качестве точек B и C тогда можно взять соседние с A вершины выпуклой оболочки.

2. Рассмотрим *опорную прямую* множества отмеченных точек, т.е. такую прямую, что все отмеченные точки лежат по одну сторону от этой прямой, а на самой прямой лежит хотя бы одна отмеченная точка. Эту точку и можно взять за точку A.

Замечание 2. В примере отмеченные точки являются вершинами правильного 180-угольника. Все примеры для $N = 180$ устроены именно таким образом (это несложно вывести, используя рассуждения из доказательства оценки, но конечно, это не требуется в решении).

Второе решение. Приведём другое доказательство оценки. Рассмотрим пару отмеченных точек A, B на наибольшем расстоянии друг от друга. Тогда для любой другой отмеченной точки C сторона AB — наибольшая в треугольнике ABC, поэтому, в частности, угол $\angle BAC$ острый.

Проведя из точки A лучи во все отмеченные точки, получаем, что все эти лучи различны (ибо три отмеченных точки не могут лежать на одной прямой), и каждый составляет с лучом AB острый угол, выражаемый целым числом градусов. Такой угол (если луч не совпадает с AB) может принимать значения от 1° до 89°, поэтому количество таких лучей $N-2$ не превосходит $2 \cdot 89 = 178$. Отсюда $N \leqslant 180$.

Замечание 3. Доказать более слабые оценки $N \leqslant 361$ и даже $N \leqslant 181$ можно, рассматривая любую отмеченную точку A (без какого-то специального выбора) и выходящие из нее лучи в другие отмеченные точки. Действительно, так как угол между любыми двумя такими лучми измеряется целым числом градусов, возможных направлений данных лучей — 360, отсюда $N \leqslant 361$. Кроме того, из любой пары противоположных направлений может присутствовать не более одного, поэтому лучей не более 180, и $N \leqslant 181$.

Замечание 4. Можно доказать оценку несколько по-другому. Рассмотрим угол BAC выпуклой оболочки множества отмеченных точек. Он выражен натуральным числом градусов и меньше 180°, значит он не превосходит 179°. Далее повторяя рассуждения из решения, получаем, что $N-2 \leqslant 179$, откуда $N \leqslant 181$.

Если хотя бы один угол выпуклой оболочки не больше 178°, то доказываем оценку $N \leqslant 180$ так же, как в первом решении.

Остается случай, когда все углы выпуклой оболочки равны 179°, или все внешние углы выпуклой оболочки равны 1°. Но сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, поэтому в выпуклой оболочке не менее 360 вершин, тогда $N \geqslant 360$. Но ранее показано, что $N \leqslant 181$ — противоречие.

Комментарий. Баллы за пример и оценку суммируются.

(1) Пример $N = 180$ точек, удовлетворяющих условию зада-

чи, с обоснованием того, что он удовлетворяет условию) — 2 балла.

Если правильный пример не обоснован, вместо 2 баллов ставится 1 балл.

(2) Полное доказательство оценки $N \leqslant 180$ — 5 баллов.

За замечание о том, что любые три отмеченные точки не могут лежать на одной прямой, баллы не добавляются. За использование этого замечания без явной его формулировки баллы не снижаются.

При отсутсвии полного доказательства оценки баллы начисляются (и суммируются) за следующие продвижения.

(а) Рассмотрена требуемая «особая» точка A (например, самая правая точка, точка на выпуклой оболочки и/или опорной прямой, и т.д.) — 1 балл.

(б) Рассмотрены лучи, выходящие из одной из отмеченных точек в другие, и замечено, что углы между такими лучами измеряются целым числом градусов — 1 балл.

Из продвижений (а) и/или (б) нетрудно вывести более слабую оценку $N \leqslant 181$, за этот вывод дополнительные баллы не начисляются.

За использование понятий опорной прямой и выпуклой оболочки и их известных свойств баллы не снижаются.

10.9. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера $1, 2, \ldots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)? (*С. Берлов*)

Ответ. 50.

Решение. *Пример.* Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки. Получаем требуемое расположение.

Есть несколько способов доказать оценку, ниже мы приводим два из них.

Первый способ. Предположим, что при некотором $k < 50$ требуемая расстановка получена.

В каждый момент времени считаем *покрашенной* дугу от фишки 100 до фишки 1 по часовой стрелке. Так как фишки 100 и 1 нельзя поменять за один ход, каждая конкретная фишка m $(2 \leqslant m \leqslant 99)$ могла попасть на покрашенную дугу или покинуть покрашенную дугу только путём обмена с одной из фишек 1 или 100.

Поскольку изначально и в конце фишка m не была на покрашенной дуге, она сделала одинаковое количество *входов* на покрашенную дугу и *выходов* с покрашенной дуги. При $m \leqslant 50$ фишка m не могла меняться с фишкой 100, поэтому она могла делать *вход* или *выход* только путём обмена с фишкой 1. При *входе* фишка 1 совершает сдвиг на 1 по часовой стрелке, а при *выходе* — на 1 против часовой стрелки. Проведём аналогичные рассуждения для фишек $m \geqslant 51$, которые не могут меняться с фишкой 1.

Тем самым, мы получаем, что фишки 1 и 100 совершат одинаковый сдвиг по и против часовой стрелки, поэтому они останутся на своих позициях. Противоречие.

Второй способ. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальной позиции, причём сдвиг по часовой стрелке будет считаться с плюсом, против часовой — с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется $+1$, а другой — -1. Значит, в результате проведенных операций сумма сдвигов будет равна 0.

Рассуждаем от противного: пусть при $k < 50$ каждая фишка i в итоге сдвинута на одну позицию по часовой стрелке, т.е. ее сдвиг оказался равным $1 + 100t_i$ (здесь t_i — целое «число оборотов» по часовой стрелке, в частности при $t_i < 0$ фишка i сделала $|t_i|$ оборотов против часовой стрелки). Тогда суммарный сдвиг всех 100 фишек равен $100(t_1 + t_2 + \ldots + t_{100}) + 100$. Поскольку он должен равняться 0, имеем $t_1 + t_2 + \ldots + t_{100} = -1$.

Поскольку $k < 50$, фишки с номерами i и j, где $j \geqslant i + 50$, не могли меняться местами, поэтому их сдвиги в любой момент заведомо отличаются меньше чем на 100, значит «количества оборотов» t_i и t_j равны при $j \geqslant i + 50$. Отсюда имеем $t_1 = t_{51}$,

$t_2 = t_{52}, \ldots, t_{50} = t_{100}$. Тогда сумма $t_1 + t_2 + \ldots + t_{100} = 2(t_1 + t_2 + \ldots + t_{50})$ — четна, а значит не равна -1. Противоречие.

Замечание 1. Последнее рассуждение можно видоизменить следующим образом.

Отсюда $t_1 = t_{51}$, $t_1 = t_{52}$, $\ldots$, $t_1 = t_{100}$, $t_2 = t_{100}$, $t_3 = t_{100}$, $\ldots$, $t_{50} = t_{100}$, таким образом, все t_i равны t_1. Тогда $t_1 + t_2 + \ldots + t_{100} = 100t_1 \neq -1$.

Замечание 2. Завершить сведение к противоречию можно и по-другому, заменив последний абзац решения на такое рассуждение.

Поскрасим красным фишки, для которых $t_i \geqslant 0$, и синим — фишки, для которых $t_i < 0$. Ясно, что на каком-то ходе синяя и красная фишки должны будут поменяться, поскольку разность их сдвигов не менее 100. Поскольку $k < 50$, пара фишек 1 и 51 — одного цвета, аналогично пары фишек 1 и 52, $\ldots$, 1 и 100, 2 и 100, 3 и 100, $\ldots$, 50 и 100 — одного цвета. Таким образом, все фишки одного цвета. Мы знаем, что $t_1 + t_2 + \ldots + t_{100} = -1$, поэтому среди чисел $t_1, \ldots, t_{100}$ есть как неотрицательные, так и отрицательные, т.е. имеются как красные, так и синие фишки — противоречие.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Баллы за пример и оценку суммируются.

Приведён верный пример — 2 балла.

Есть полное доказательство оценки — 5 баллов.

При отсутствии полного доказательства оценки оцениваются следующие продвижения (баллы за продвижение (1) не суммируются с баллами за продвижения (2a), (2b), (2c), баллы за продвижения (2a), (2b), (2c) суммируются):

(1) Присутствует идея отслеживать принадлежность фишек дуге 100—1 (или взаимное расположение тройки фишек $1, m, 100$) — 2 балла.

(2a) рассмотрены сдвиги и показано, что сумма сдвигов равна 0 — 1 балл.

(2b) в предположении, что фишки в итоге сместились на 1 по часовой стрелке, записано равенство на сумму «количества оборотов» — 1 балл.

(2c) показано, что фишки с разным «количеством оборотов» или с «количеством оборотов» разного знака обязательно менялись местами на каком-то ходу — 1 балл.

10.10. Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100}.

(*Д. Храмцов*)

Решение. Положим $a = 10^{100}$. Через $s(m)$ обозначим сумму цифр числа m. Отметим простое свойство $s(\ell)+s(m) \geqslant s(\ell+m)$, которое сразу видно, если числа ℓ и m сложить в столбик.

Лемма. *Пусть k — натуральное число, и пусть натуральное число m кратно $10^k - 1$. Тогда $s(m) \geqslant 9k$.*

Доказательство. Индукция по m. База $m = 10^k - 1$ очевидна.

Предположим, что $m \geqslant 10^k$, и что утверждение доказано для всех чисел, меньших m. Докажем его и для m. Пусть последние k цифр числа m образуют число v (возможно, с ведущими нулями), а все остальные — число $u > 0$ (иначе говоря, $m = \overline{uv} = 10^k u + v$). Поскольку m делится на $10^k - 1$, то и (положительное) число $m' = u + v = m - (10^k - 1)u$ также кратно $10^k - 1$. Поэтому $s(m') \geqslant 9k$ по предположению индукции, а тогда и $s(m) = s(u) + s(v) \geqslant s(u + v) = s(m') \geqslant 9k$. $\square$

Для решения задачи осталось взять такое k, что $9k \geqslant a$, и заметить, что если $b = 10^k - 1$ и $n \geqslant b$, то $n!$ делится на $10^k - 1$ и, значит, $s(n!) \geqslant 9k \geqslant a$.

Замечание. В доказательстве леммы по сути использован следующий признак делимости на $10^k - 1$. Разобьём десятичную запись числа m на блоки по k цифр (первый блок может быть неполон). Воспринимая эти блоки как обычные числа (возможно, с ведущими нулями), сложим их, получив число m'. Тогда m кратно $10^k - 1$ тогда и только тогда, когда m' делится на $10^k - 1$.

У леммы есть несколько вариаций; например, любое число, делящееся на число $\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ единиц}}$, имеет сумму цифр, не меньшую k.

Комментарий. Сформулирована лемма (или аналогичный верный факт), утверждение задачи сведено к этому факту, но сам факт не доказан — 4 балла.

Использован без доказательства признак делимости, сформулированный выше — баллы не снимаются.