Материалы для проведения регионального этапа

XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Второй день

4–5 февраля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **4 февраля 2022 г.** (I тур) и **5 февраля 2022 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2021–2022 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geqslant n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leqslant n \leqslant 2022$ и $1 \leqslant k \leqslant 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}? (*Н. Агаханов*)

Ответ. $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3 = 7 \cdot 1011^3$.

Решение. Записывая условие при $n = 2022$, $k = 1011$ и при $n = 1011$, $k = 2022$, получаем

$$a_{2022} = a_{2022} - a_{1011} \geqslant 2022^3 - 1011^3$$

и

$$-a_{2022} = a_{1011} - a_{2022} \geqslant 1011^3 - 2022^3,$$

то есть $a_{2022} \geqslant 2022^3 - 1011^3 \geqslant a_{2022}$. Отсюда и следует ответ.

Замечание. Последовательность, удовлетворяющая условию, существует, а именно $a_n = n^3 - 1011^3$. Более того, аналогично решению выше несложно показать, что такая последовательность единственна. Однако для решения задачи *не требуется* ни находить все такие последовательности, ни даже приводить пример такой последовательности.

Комментарий. Доказано, что $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3$ — 7 баллов.

Доказано только, что $a_{2022} \leqslant 2022^3 - 1011^3$ (или только $a_{2022} \geqslant 2022^3 - 1011^3$) — 1 балл.

9.7. Петя разбил клетчатый квадрат 100×100 некоторым образом на *домино* — клетчатые прямоугольники 1×2, и в каждом домино соединил центры двух его клеток синим отрезком. Вася хочет разбить этот же квадрат на домино вторым способом, и в каждом своём домино соединить две клетки красным отрезком. Вася хочет добиться того, чтобы из каждой клетки можно было пройти в любую другую, идя по синим и красным отрезкам. Обязательно ли у него будет возможность это сделать?

(*Е. Бакаев*)

Ответ. Не обязательно.

Первое решение. Занумеруем вертикали слева направо числами от 1 до 100, Пусть a — верхняя строка квадрата, а b — строка сразу под ней. Пусть в петином разбиении эти строки заняты вертикальными домино $a1 - b1$, $a2 - b2$, …, $a98 - b98$ и горизонтальными домино $a99 - a100$, $b99 - b100$. Очевидно, что оставшуюся часть доски можно разбить на домино (например, на горизонтальные), поэтому такое разбиение существует.

Предположим, что существует васино разбиение на домино, удовлетворяющее требованиям задачи. Если в васином разбиении какая-то из клеток $a1, a2, \ldots, a98$ занята вертикальным домино, то это — то же домино, что и в петином разбиении, и из этих двух клеток нельзя добраться до остальных. Поэтому в васином разбиении обязательно должны присутствовать домино $a1 - a2$, $a3 - a4$, …, $a97 - a98$. Аналогично, клетки $a99$ и $a100$ не могут быть накрыты горизонтальными домино, поэтому они накрыты вертикальными домино $a99 - b99$ и $a100 - b100$. Но тогда из четырёх клеток $a99$, $a100$, $b99$, $b100$ нельзя попасть в остальные — противоречие.

Замечание. Существуют и другие варианты петиного разбиения, при которых требуемое невозможно. Например, если обозначить через c строку непосредственно под b, то годится любое разбиение, содержащее следующие пять домино: $a1 - b1$, $a2 - b2$, $a3 - a4$, $b3 - b4$, $c1 - c2$ (такие разбиения существуют).

Второе решение. Предположим, что Васе удалось требуемое. Тогда из каждой клетки выходит один синий и один красный отрезок, при этом они идут в разные клетки — иначе из этих двух клеток нельзя было бы добраться до остальных.

Раскрасим все клетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвета, и поставим на каждом синем отрезке стрелку от белой клетки к чёрной, а на красном — от чёрной к белой. Тогда из каждой клетки ведёт ровно одна стрелка, и в неё входит ровно одна. Тогда все клетки разбились на циклы, и, если Васе требуемое удалось, то получился один цикл из всех клеток.

Пусть a — верхняя горизонталь, а z — нижняя. Пусть в петином разбиении присутствуют домино $a1 - a2$ и $z2 - z3$ (такое разбиение возможно, если, например, клетки $z1$ и $z100$ покрыть вертикальными домино, а все остальные домино сделать горизонтальными). Тогда эти отрезки будут ориентированы как

$a1 \to a2$ и $z2 \to z3$. Если они находятся в одном цикле, то этот цикл должен пройти от $a2$ к $z2$, а затем от $z3$ к $a1$. Но такие два пути должны иметь общую клетку, что невозможно.

Комментарий. В решении должно присутствовать явное и достаточно подробное объяснение конструкции петиного разбиения, противоречащего желаниям Васи. Может так случиться, что приведены несколько домино, которые надо включить в петино разбиение, но полного разбиения, содержащего такие домино, не существует. В таком случае ставится 0 баллов за задачу.

Полная верная конструкция оценивается в 3 балла.

При наличии только локального верного разбиения (которое можно дополнить до разбиения всего квадрата) ставятся 2 балла вместо 3.

Доказательство того, что приведённое разбиение не удовлетворяет желаниям Васи — 4 балла.

При переборном характере доказательства за пропуск *одного* частного случая расположения домино в васином разбиении снимается 2 балла.

Если пропущено более одного случая, за доказательство ставится 0 баллов.

Естественно, баллы за описание примера и за доказательство того, что он подходит, суммируются друг с другом.

9.8. В трапеции $ABCD$ диагональ BD равна основанию AD. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Точка F на отрезке AD выбрана так, что $EF \parallel CD$. Докажите, что $BE = DF$.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Поскольку $AD \parallel CB$, треугольники EAD и ECB подобны, и потому $\frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AD}$.

Достроим треугольник BCD до параллелограмма $BCDK$ (см. рис. **??**). Тогда треугольники DEF и DBK подобны, поэтому $\frac{DF}{DE} = \frac{DK}{DB}$. Наконец, поскольку $DK = BC$ и $DB = DA$, получаем

$$\frac{DF}{DE} = \frac{DK}{DB} = \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{DE},$$

откуда и следует, что $DF = BE$.

9.9. На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно?

(*Е. Бакаев*)

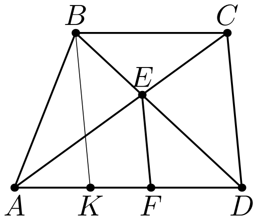

Рис. 1

Ответ. 180.

Первое решение. *Пример.* Покажем сначала, что при $N = 180$ требуемое возможно. Отметим на окружности 180 точек, разбивающих её на 180 равных дуг величиной по 2° каждая. Величина любой дуги с концами в двух из отмеченных точек выражается чётным числом градусов, поэтому величина любого вписанного в окружность угла, образованного тремя отмеченными точками, выражается натуральным числом градусов. Следовательно, 180 отмеченных точек удовлетворяют условию задачи.

Оценка. Осталось доказать, что $N \leqslant 180$. Любые три отмеченных точки образуют треугольник, поэтому не могут лежать на одной прямой. Считая отмеченные точки расположенными на координатной плоскости, обозначим через A любую из них с максимальной ординатой. Среди оставшихся выберем точки B и C такие, что угол BAC максимален.

Из условия задачи следует, что в треугольнике ABC величины углов ABC и ACB не меньше 1°, поэтому величина угла BAC не больше 178°. Ввиду выбора точек B и C остальные $N-3$ отмеченные точки лежат строго внутри угла BAC, и каждый луч с началом в точке A содержит не больше одной из них. Проведя через каждую отмеченную точку внутри угла BAC луч с началом в точке A, получим $N-3$ различных луча, делящих $\angle BAC$ на $N-2$ угла. Если $N-2 > 178$, то хотя бы один из этих углов имеет величину, меньшую 1°, и является углом некоторого треугольника с вершинами в трёх отмеченных точках, что противоречит условию задачи. Следовательно, $N-2 \leqslant 178$, то есть $N \leqslant 180$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Описать выбор используемой в решении точки A можно также следующими способами.

1. Рассмотрим вершину A *выпуклой оболочки* системы отмеченных точек. В качестве точек B и C тогда можно взять соседние с A вершины выпуклой оболочки.

2. Рассмотрим *опорную прямую* множества отмеченных точек, т.е. такую прямую, что все отмеченные точки лежат по одну сторону от этой прямой, а на самой прямой лежит хотя бы одна отмеченная точка. Эту точку и можно взять за точку A.

Замечание 2. В примере отмеченные точки являются вершинами правильного 180-угольника. Все примеры для $N = 180$ устроены именно таким образом (это несложно вывести, используя рассуждения из доказательства оценки, но конечно, это не требуется в решении).

Второе решение. Приведём другое доказательство оценки. Рассмотрим пару отмеченных точек A, B на наибольшем расстоянии друг от друга. Тогда для любой другой отмеченной точки C сторона AB — наибольшая в треугольнике ABC, поэтому, в частности, угол $\angle BAC$ острый.

Проведя из точки A лучи во все отмеченные точки, получаем, что все эти лучи различны (ибо три отмеченных точки не могут лежать на одной прямой), и каждый составляет с лучом AB острый угол, выражаемый целым числом градусов. Такой угол (если луч не совпадает с AB) может принимать значения от 1° до 89°, поэтому количество таких лучей $N - 2$ не превосходит $2 \cdot 89 = 178$. Отсюда $N \leqslant 180$.

Замечание 3. Доказать более слабые оценки $N \leqslant 361$ и даже $N \leqslant 181$ можно, рассматривая любую отмеченную точку A (без какого-то специального выбора) и выходящие из нее лучи в другие отмеченные точки. Действительно, так как угол между любыми двумя такими лучми измеряется целым числом градусов, возможных направлений данных лучей — 360, отсюда $N \leqslant 361$. Кроме того, из любой пары противоположных направлений может присутствовать не более одного, поэтому лучей не более 180, и $N \leqslant 181$.

Замечание 4. Можно доказать оценку несколько подругому. Рассмотрим угол BAC выпуклой оболочки множества отмеченных точек. Он выражен натуральным числом градусов и меньше 180°, значит он не превосходит 179°. Далее повторяя рассуждения из решения, получаем, что $N - 2 \leqslant 179$, откуда $N \leqslant 181$.

Если хотя бы один угол выпуклой оболочки не больше 178°, то доказываем оценку $N \leqslant 180$ так же, как в первом решении.

Остается случай, когда все углы выпуклой оболочки равны 179°, или все внешние углы выпуклой оболочки равны 1°. Но сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, поэтому в выпуклой оболочке не менее 360 вершин, тогда $N \geqslant 360$. Но ранее показано, что $N \leqslant 181$ — противоречие.

Комментарий. Баллы за пример и оценку суммируются.

(1) Пример $N = 180$ точек, удовлетворяющих условию задачи, с обоснованием того, что он удовлетворяет условию) — 2 балла.

Если правильный пример не обоснован, вместо 2 баллов ставится 1 балл.

(2) Полное доказательство оценки $N \leqslant 180$ — 5 баллов.

За замечание о том, что любые три отмеченные точки не могут лежать на одной прямой, баллы не добавляются. За использование этого замечания без явной его формулировки баллы не снижаются.

При отсутсвии полного доказательства оценки баллы начисляются (и суммируются) за следующие продвижения.

(а) Рассмотрена требуемая «особая» точка A (например, самая правая точка, точка на выпуклой оболочки и/или опорной прямой, и т.д.) — 1 балл.

(б) Рассмотрены лучи, выходящие из одной из отмеченных точек в другие, и замечено, что углы между такими лучами измеряются целым числом градусов — 1 балл.

Из продвижений (а) и/или (б) нетрудно вывести более слабую оценку $N \leqslant 181$, за этот вывод дополнительные баллы не начисляются.

За использование понятий опорной прямой и выпуклой оболочки и их известных свойств баллы не снижаются.

9.10. Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100}.

(*Д. Храмцов*)

Решение. Положим $a = 10^{100}$. Через $s(m)$ обозначим сумму цифр числа m. Отметим простое свойство $s(\ell)+s(m) \geqslant s(\ell+m)$, которое сразу видно, если числа ℓ и m сложить в столбик.

Лемма. *Пусть k — натуральное число, и пусть натуральное число m кратно 10^k-1. Тогда $s(m) \geqslant 9k$.*

Доказательство. Индукция по m. База $m = 10^k-1$ очевидна.

Предположим, что $m \geqslant 10^k$, и что утверждение доказано для всех чисел, меньших m. Докажем его и для m. Пусть последние k цифр числа m образуют число v (возможно, с ведущими нулями), а все остальные — число $u > 0$ (иначе говоря, $m = \overline{uv} = 10^k u + v$). Поскольку m делится на 10^k-1, то и (положительное) число $m' = u+v = m-(10^k-1)u$ также кратно 10^k-1. Поэтому $s(m') \geqslant 9k$ по предположению индукции, а тогда и $s(m) = s(u)+s(v) \geqslant s(u+v) = s(m') \geqslant 9k$. $\square$

Для решения задачи осталось взять такое k, что $9k \geqslant a$, и заметить, что если $b = 10^k-1$ и $n \geqslant b$, то $n!$ делится на 10^k-1 и, значит, $s(n!) \geqslant 9k \geqslant a$.

Замечание. В доказательстве леммы по сути использован следующий признак делимости на 10^k-1. Разобьём десятичную запись числа m на блоки по k цифр (первый блок может быть неполон). Воспринимая эти блоки как обычные числа (возможно, с ведущими нулями), сложим их, получив число m'. Тогда m кратно 10^k-1 тогда и только тогда, когда m' делится на 10^k-1.

У леммы есть несколько вариаций; например, любое число, делящееся на число $\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ единиц}}$, имеет сумму цифр, не меньшую k.

Комментарий. Сформулирована лемма (или аналогичный верный факт), утверждение задачи сведено к этому факту, но сам факт не доказан — 4 балла.

Использован без доказательства признак делимости, сформулированный выше — баллы не снимаются.