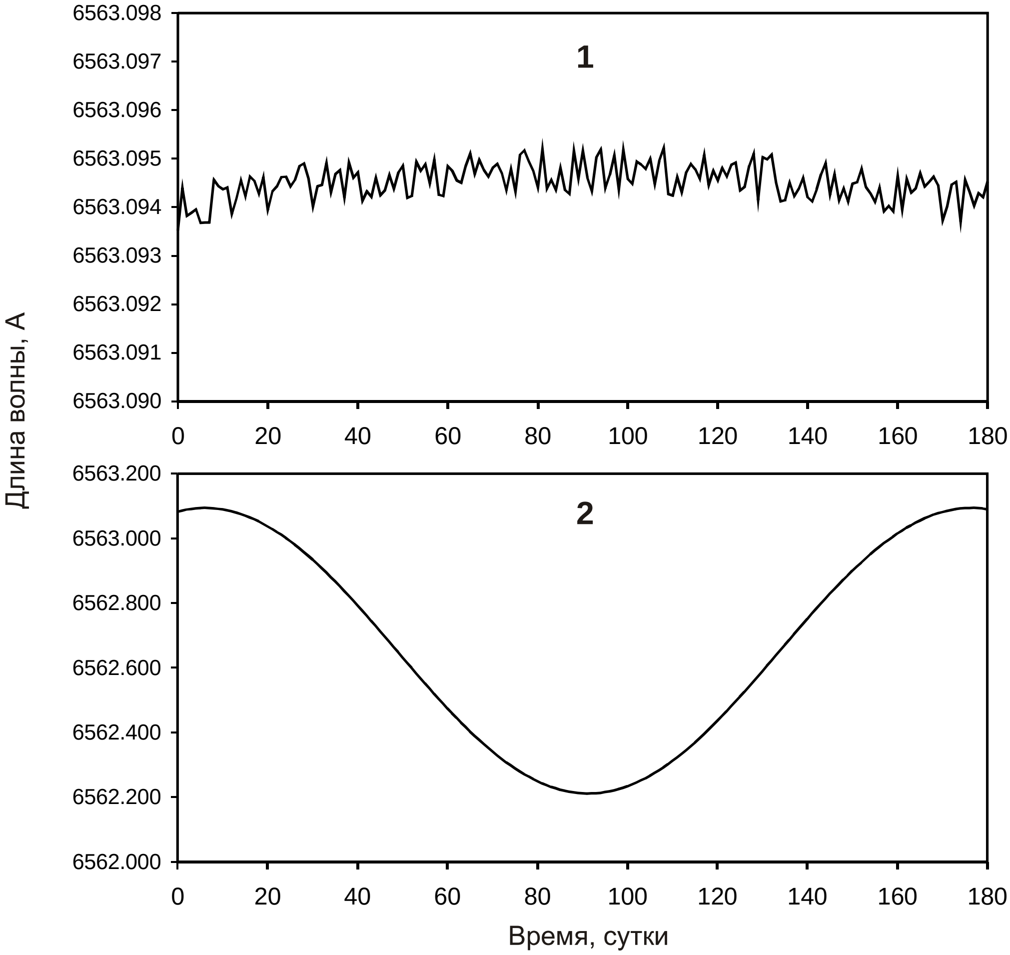
11 класс

11.7. Двойная линия

Условие. С помощью спектрографа высокого разрешения производятся наблюдения некоторой гравитационно-связанной звездной системы. Оказалось, что линия поглощения водорода Hα в ее спектре состоит из двух одинаковых по форме и глубине компонент. Зависимость центральной длины волны этих компонент от времени приведена на рисунках. Длины волн приведены к барицентру Солнечной системы (эффект движения наблюдателя в Солнечной системе вычтен). Известно, что система состоит из сферических компонент, массы которых строго одинаковы, а орбиты круговые. Лучевая скорость центра масс системы относительно барицентра Солнечной системы постоянна. Исходя из этого, определите минимально возможную полную массу системы. Что вы можете сказать о входящих в нее звездах? Поверхность каждой звезды однородна, осевым вращением, пятнами, потемнением к краю звезд пренебречь.

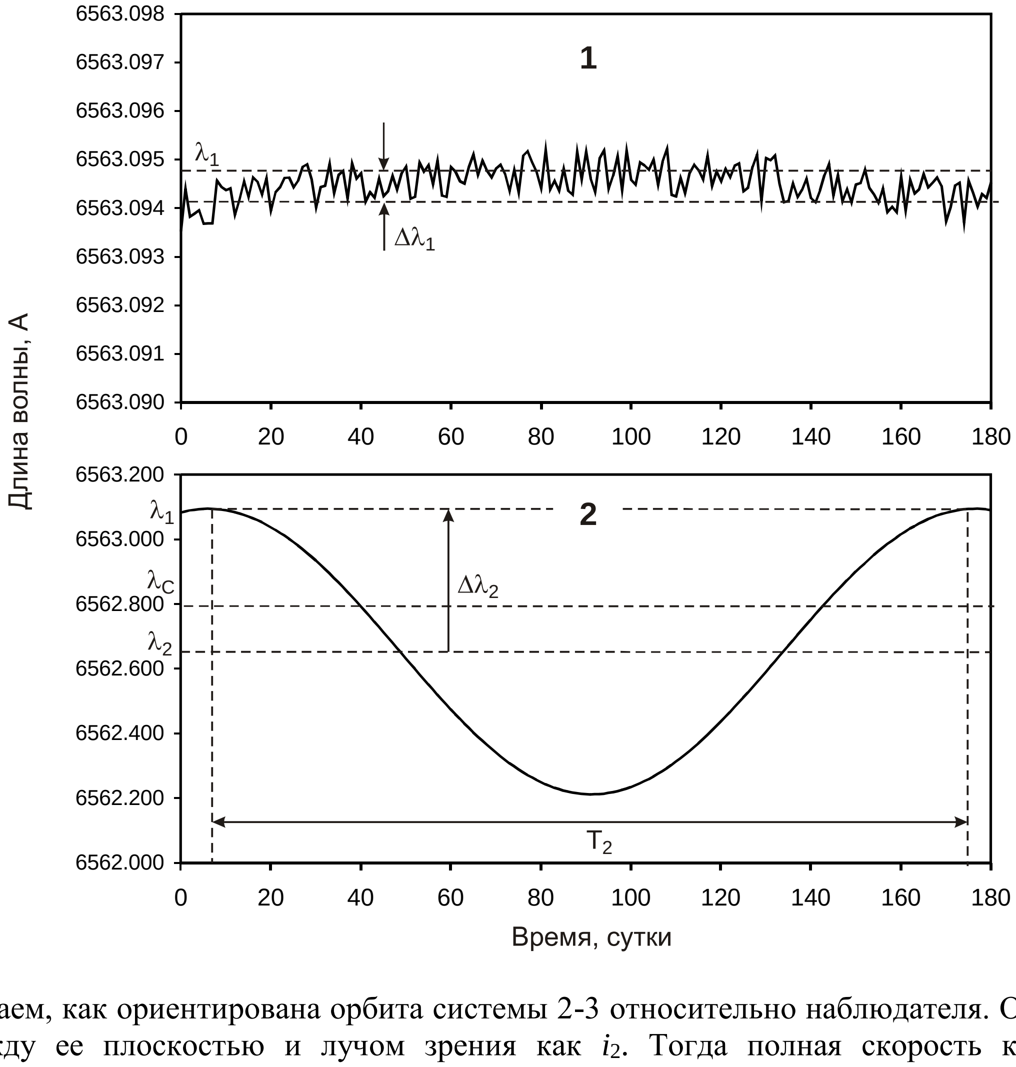


Решение. С первого поверхностного взгляда может показаться, что система состоит из двух одинаковых звезд, которые каким-то образом двигаются вокруг общего центра масс. Однако такая простая картина сразу вступает в противоречие с наблюдательными фактами. Длина волны первой линии в течение 180 дней наблюдений меняется крайне слабо, примерно на 0.001 А, то есть лучевая скорость этой звезды практически постоянна. А вот вторая звезда успевает ее существенно изменить, более того, проходит целый цикл ее колебания в пределах порядка 1А, то есть в 1000 раз сильнее, чем изменения длины волны первой компоненты.

По условию задачи, все компоненты, входящие в эту систему, имеют равные массы. Получается, что центр масс системы только из данных двух звезд за время наблюдений успел заметно изменить лучевую скорость относительно наблюдателя, что противоречит условию задачи. Таким образом, двумя звездами, создающими линии Hα в спектре, система не исчерпывается.

Действительно, изменение длины волны звезды 2 можно интерпретировать как ее вращение вокруг общего центра масс с еще одним телом, которое по каким-то причинам либо не излучает свет, либо не содержит линию Hα в своем спектре. По условию задачи, масса этого тела m такая же, как и у звезд 1 и 2. На графике мы видим, что во временной диапазон наблюдений попали два максимума и минимум длины волны, период T_2 составляет около 170 суток или 0.465 года. Амплитуда изменения длины волны по отношению к среднему значению $\Delta\lambda_2$ составляет около 0.44A. Отсюда мы находим амплитуду лучевой скорости звезды 2 и ее компаньона (назовем его звездой 3) с такой же массой:

$$v_{L2} = c\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} = 20\, км / с.$$



Мы не знаем, как ориентирована орбита системы 2-3 относительно наблюдателя. Обозначим угол между ее плоскостью и лучом зрения как i_2. Тогда полная скорость каждой из компонент есть $v_2 = v_{L2} / \cos i_2$. Звезды 2 и 3 с массой M каждая движутся по одинаковой круговой орбите на расстоянии a_2 друг от друга, радиус их орбит есть $a_2/2$. Таким образом,

$$\frac{GM^2}{a_2^2} = \frac{2Mv_{L2}^2}{a_2 \cos^2 i_2}; \quad \frac{v_{L2}T}{\cos i_2} = \pi a_{2.}.$$

Отсюда мы получаем

$$M = \frac{2v_{L2}^3 T_2}{\pi G \cos^3 i_2} = \frac{1.1 \cdot 10^{30}\ кг}{\cos^3 i_2}.$$

Это же выражение можно получить из III закона Кеплера, только нужно обратить внимание, что v_{L2} – это лучевая скорость одной компоненты, а не разница скоростей двух компонент (при подстановке $a_2 = v_L T/2\pi$ мы получим ошибку сразу в 8 раз!). Минимально возможная масса каждой из звезд 2 и 3 составляет чуть более половины массы Солнца, тогда суммарная масса этой двойной системы составила бы 1.1 масс Солнца. Минимальное расстояние между компонентами 2 и 3 (a_2) составляет примерно 0.6 а.е.

Но мы не должны забывать, что в системе есть еще по крайней мере одна компонента, звезда 1, с такой же массой, как у компонент 2 и 3. По оптическим свойствам она, по-видимому, похожа на звезду 2. Более того, предположение, что она тоже имеет массу 0.55 масс Солнца, а суммарная масса равна 1.65 масс Солнца, тоже противоречит наблюдениям. Обратим внимание, что длина волны линии На в спектре звезды 1 совпадает с максимальной длиной волны этой линии в спектре звезды 2, когда последняя движется от наблюдателя в ходе вращения в системе со звездой 3. Иными словами, звезда 1 имеет значительную скорость по отношению к центру масс системы 2-3.

По условию задачи, система гравитационно связана, орбиты в ней круговые, а все тела имеют одинаковую массу. Лучевая скорость звезды 1 относительно центра масс системы 2-3 по величине совпадает с амплитудой лучевой скорости звезды 2 – 20 км/с. Скорость звезды 1 меняется мало, и мы можем считать, что она не участвует в быстром вращении с еще какой-либо массивной звездой (вспомним, что мы должны оценить минимальную массу системы). Маломассивных тел в системе нет по условию задания. Поэтому будем далее рассматривать систему как тройную. Звезда 1 вдвое меньше по массе, чем система 2-3. Поэтому длина волны, соответствующая лучевой скорости центра масс всей тройной системы, есть:

$$\lambda_C = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3} = \lambda_1 - \frac{2\Delta\lambda_2}{3}.$$

Длина волны линии в спектре звезды 1 должна совершать синусоидальные колебания относительно λ_C. Мы видим лишь их малый участок, что связано с большим периодом T_1 обращения звезды 1 относительно центра масс системы. Оценить его могло быть затруднительно, но по счастью, в середину интервала попал максимум длины волны λ_1. На краях интервала (сдвиг времени $\pm T_2/2$) длина волны уменьшается на величину $\Delta\lambda_1$. Тогда справедливо соотношение:

$$\lambda_1 - \Delta\lambda_1 = \lambda_C + (\lambda_1 - \lambda_C)\cos\frac{2\pi \cdot T_2/2}{T_1};$$

$$\Delta\lambda_1 = (\lambda_1 - \lambda_C)\cdot\left(1 - \cos\frac{\pi \cdot T_2}{T_1}\right) \approx \frac{2\Delta\lambda_2}{3}\cdot\frac{\pi^2 T_2^2}{2T_1^2}.$$

Величина $\Delta\lambda_1$ очень мала. Ее приближенная оценка по графику дает 0.0007 А. Отсюда мы получаем оценку орбитального периода звезды 1:

$$T_1 = \pi T_2 \sqrt{\frac{\Delta\lambda_2}{3\Delta\lambda_1}} \approx 20\ лет.$$

Амплитуда изменения лучевой скорости звезды 1 есть:

$$v_{L1} = c\frac{2\Delta\lambda_2}{3\lambda_C} = \frac{2v_{L2}}{3}.$$

Аналогично действиям выше, описываем движение звезды 1 с массой M, удаленной от системы звезд 2-3 с суммарной массой $2M$ на расстояние a_1. Учитываем, что сама звезда 1 движется по кругу радиусом $2a_1/3$:

$$\frac{2GM^2}{a_1^2} = \frac{3Mv_{L1}^2}{2a_1 cos^2 i_1};\quad \frac{v_{L1}T_1}{cos\, i_1} = \frac{4\pi a_1}{3}.$$

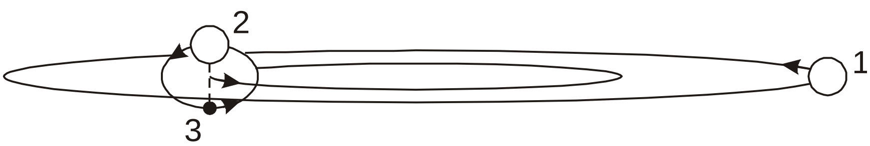
Здесь i_1 – угол между лучом зрения и плоскостью орбиты звезды 1. Отсюда получаем оценку для массы компоненты:

$$M = \frac{9v_{L1}^3 T_1}{16\pi G\, cos^3 i_1} = \frac{v_{L2}^3 T_1}{6\pi G\, cos^3 i_1} = \frac{4\cdot 10^{30}\ кг}{cos^3 i_1}.$$

В итоге, даже при орбитах, расположенных на луче зрения, масса одной компоненты не меньше 2 масс Солнца. Это более сильное ограничение, чем мы получили при анализе движения системы 2-3. Очевидно, что угол наклона этой системы i_2 к лучу зрения значителен:

$$i_2 \geq arccos\left(\frac{1}{4}^{1/3}\right) = 50^\circ.$$

Оговоримся, что оценка этого угла не входит в задание. Тем не менее, она позволяет правильно понять конфигурацию этой системы (рисунок) для случая минимальной общей массы, которая, таким образом, составляет 6 масс Солнца. Добавим также, что расстояние между звездами 2 и 3 при таком наклоне составляет около 1 а.е.



Нам осталось понять, что за звезды входят в систему. Две звезды с массой 2 массы Солнца и линией Hα в спектре – скорее всего, звезды главной последовательности класса A типа Веги. У таких звезд линии бальмеровской серии в спектре наиболее интенсивные. Для третьей звезды есть две принципиальные возможности: либо эта звезда темная, либо она не содержит линию Hα в спектре. В первом случае вполне естественно предположение о компактном объекте, скорее всего – нейтронной звезде. Это точно не белый карлик, так как масса превышает максимум для такого типа звезд. Возможен также вариант космологической (возрастной) черной дыры, собравшей вокруг себя кратную систему.

Если же тело 3 все же является нормальной звездой, то линий бальмеровской серии у нее может не быть в двух противоположных случаях – либо звезда очень горячая, и ее водород полностью ионизован, либо холодная, и атомы водорода находятся на первом энергетическом уровне, не поглощая бальмеровские кванты света. В первом случае это не может быть обычная звезда на главной последовательности, так как такие звезды с массой 2 массы Солнца не могут быть горячее класса A. Но это может быть гелиевая звезда, лишенная своей водородной оболочки другой компонентой кратной системы.

Вариант же холодной звезды с такой массой был бы возможен в виде красного гиганта с большим радиусом. Однако такой объект вряд ли смог бы существовать на орбите со звездой главной последовательности спектрального класса A в 1 а.е. друг от друга. Итак, наиболее вероятный кандидат на роль тела 3 – нейтронная звезда.

Система оценивания.

<u>1 этап – 2 балла.</u> Вывод о наличии третьего тела в системе. Он должен быть обоснован одним из двух факторов – быстрым вращением звезды 2, в котором не участвует звезда 1, или движением центра масс звезд 1-2 относительно наблюдателя с переменной лучевой скоростью. Если третье тело фигурирует в решении задачи без хотя бы одного из этих двух обоснований – этап оценивается 1 баллом, остальные оцениваются в полной мере.

Замечание: любое решение задачи, в которой в системе есть только две звезды, оценивается не выше 2 баллов.

<u>2 этап – 4 балла.</u> Оценка минимальной массы одной звезды на основе быстрого вращения звезды 2. Требуемая точность – 0.1 масса Солнца.

Вероятная ошибка участника: использование радиуса орбиты одной звезды вместо расстояния между ними в III законе Кеплера, что в итоге дает 8-кратную ошибку. Этап оценивается не выше 1 балла.

Замечание: полученное в этом этапе ограничение массы звезд снизу не оказалось решающим. Ее можно далее использовать для определения угла наклона орбиты к лучу зрения, но и это не является необходимым в решении. Тем не менее, выполнение этого этапа обязательно, так как факт, что данное ограничение массы оказалось более мягким, чем следующее, не является очевидным.

<u>3 этап – 5 баллов.</u> Оценка минимальной массы одной звезды на основе движения звезды 1. Требуемая точность – 0.4 массы Солнца.

Замечание по точности: базовым экспериментальным фактом, используемым здесь, является крайне малое изменение длины волны линии первой звезды. Однако, эта величина ($\Delta\lambda_1$) входит в итоговое выражение в степени (–1/2), что позволяет определить массу звезды с точностью не хуже 20%.

Вероятная ошибка участника: использование радиуса орбиты звезды 1 вместо расстояния до центра системы 2-3 в III законе Кеплера, что в итоге дает ошибку в 3 с лишним раза. Этап оценивается не выше 2 баллов.

Вероятная ошибка участника: неправильное определение радиуса орбиты звезды 1 и ее орбитальной скорости (например, фактор 1/2 или 1/3 вместо 2/3 в соответствующих формулах). Этап оценивается не выше 2 баллов.

<u>4 этап – 1 балл.</u> Вывод о минимальной суммарной массе системы. Оценивается только при правильном ответе с точностью до 20%.

Вероятное неверное выполнение этапов 2-4: участник опускает факторы cos i при анализе движения тел 2 и 1. Полученные значения масс интерпретируются не как минимальные, а как точные. В этом случае разность масс на 2 и 3 этапах может трактоваться как погрешность измерений или ошибок в вычислениях. Как возможное следствие, участник может выбрать значение массы одной звезды 0.55 масс Солнца (2 этап), так как оно меньше, а в условии требуется найти минимальное значение суммарной массы. В этом случае этапы 2 оценивается в 2 балла, этап 3 – в 3 балла (при условии отсутствия иных ошибок), этап 4 не засчитывается.

<u>5 этап – 1 балл.</u> Вывод о свойствах звезд 1 и 2.

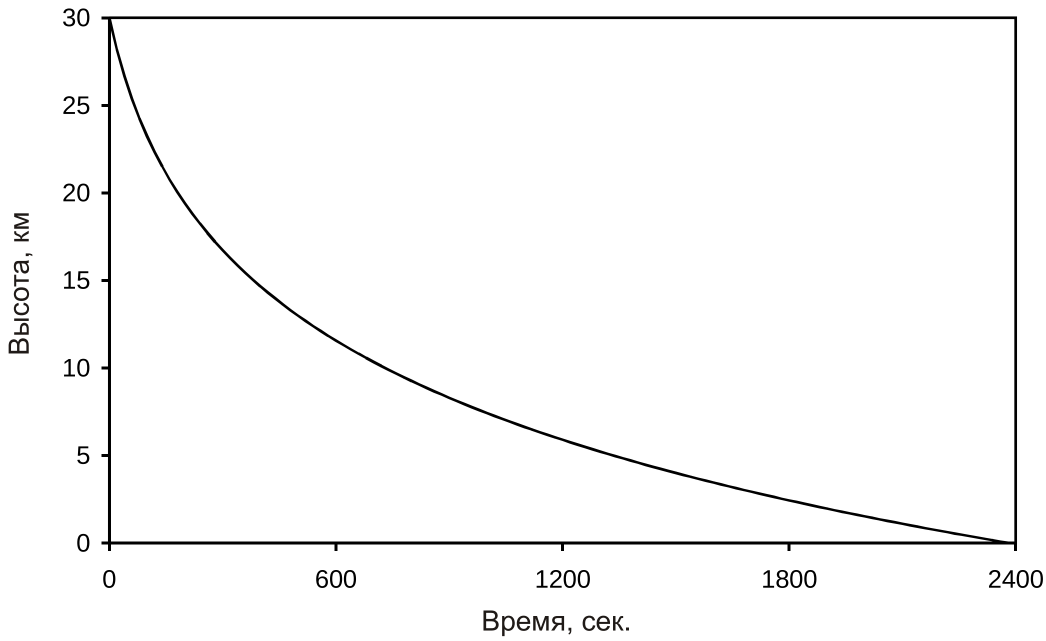
<u>6 этап – 2 балла.</u> Вывод о свойствах звезды 3. Указание только компактного объекта в виде нейтронной звезды или черной дыры оценивается в 1 балл. Для второго балла необходим критический анализ вариантов обычных звезд без линии Hα в спектре.

Примечание: если в результате ошибочных вычислений массы одной компоненты получается значение, меньшее 1.4 массы Солнца, белый карлик в качестве звезды 3 также считается правильным ответом на данном этапе решения. Но это также оценивается 1 баллом, для второго необходим анализ вариантов нормальных звезд. Если же масса одного тела получается еще меньше (например, 0.5-0.6 масс Солнца в соответствии с этапом 2), то участники должны рассмотреть вариант красных карликов и, вообще говоря, прийти к противоречию, так как линии водорода у них также крайне слабые, и становится непонятна природа звезд 1 и 2.

11.8. Перед посадкой

Условие. Космический аппарат готовится совершить посадку на поверхность далекой планеты, похожей по радиусу и массе на Землю. Завершив торможение двигателем в верхних слоях атмосферы, аппарат выключил его, раскрыл парашют и опускается строго вертикально. Радиолокатор непрерывно фиксирует данные о высоте аппарата над поверхностью. Пользуясь приведенным графиком, определите температуру атмосферы планеты, считая ее постоянной. Влиянием ветра на движение аппарата пренебречь. При решении задачи считать, что:

1) Сила сопротивления воздуха пропорциональна плотности воздуха и квадрату скорости аппарата;
2) Атмосфера целиком состоит из азота N_2, распределение концентрации молекул атмосферы с высотой h – больцмановское ($n \sim \exp(-\mu g h/\Re T)$, μ – молярная масса, g – ускорение свободного падения, $\Re$ – универсальная газовая постоянная, T – температура).



Решение. В условии задания сказано, что аппарат уже завершил торможение двигателем и спускается на парашюте. По графику мы видим, что скорость аппарата невелика (даже в начале интервала – несколько километров в минуту) и несопоставимо меньше космической. По ходу спуска скорость еще уменьшается. Поэтому мы можем решать задачу в равновесной модели – считать, что в любой момент времени сила сопротивления воздуха (ускорение a) уравновешивает силу притяжения аппарата (ускорение g) к планете. По мере снижения аппарата плотность атмосферы увеличивается, сила сопротивления воздуха растет, и равновесие достигается при меньшей скорости. В качестве подтверждения этой модели можно обратить внимание на то, что реальные величины итоговых ускорений аппарата ($g - a$) несравнимо меньше по величине, чем g, поэтому мы можем считать $g = a$. Кроме этого, мы можем считать ускорение свободного падения g постоянным.

В соответствии с условием задачи, ускорение силы сопротивления есть

$$a = K \cdot n \cdot v^2 = g = const.$$

Здесь n – концентрация молекул в воздухе, v – скорость снижения аппарата, K – некоторая постоянная. Это ускорение постоянно, так как оно уравновешивает ускорение свободного падения. Концентрация молекул меняется с высотой в соответствии с распределением Больцмана. Запишем выражение для скорости снижения аппарата:

$$v = -\frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{g}{K \cdot n}} = \sqrt{\frac{g}{K \cdot n_0}} \cdot e^{\frac{\mu g h}{2\Re T}}.$$

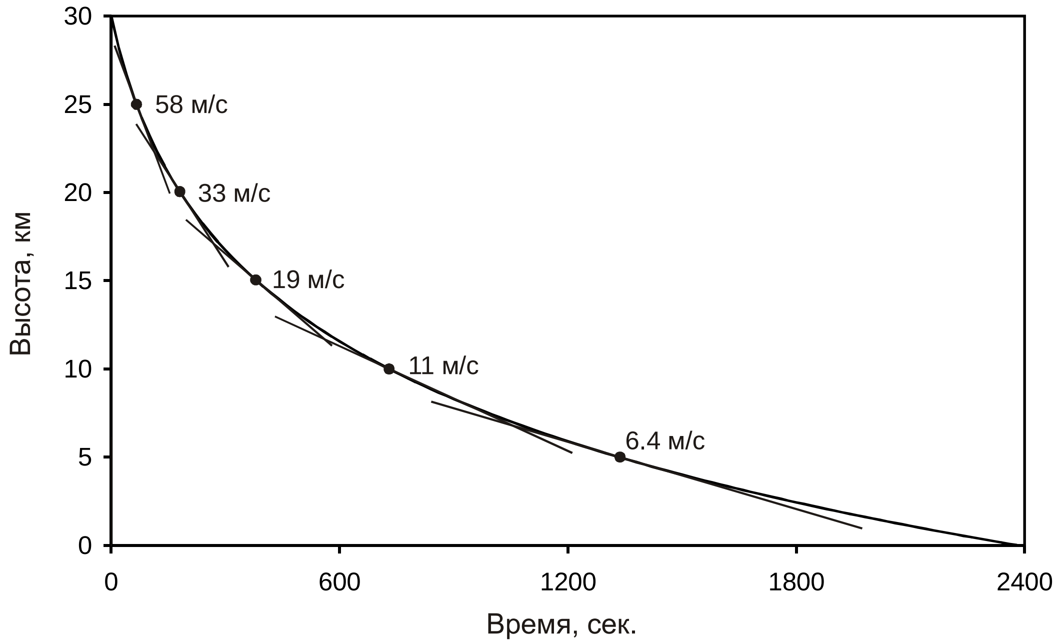
Здесь t – время, n_0 – концентрация молекул у поверхности. Мы можем прологарифмировать данное выражение:

$$ln\left(v\sqrt{\frac{K \cdot n_0}{g}}\right) = \frac{\mu g h}{2\Re T}.$$

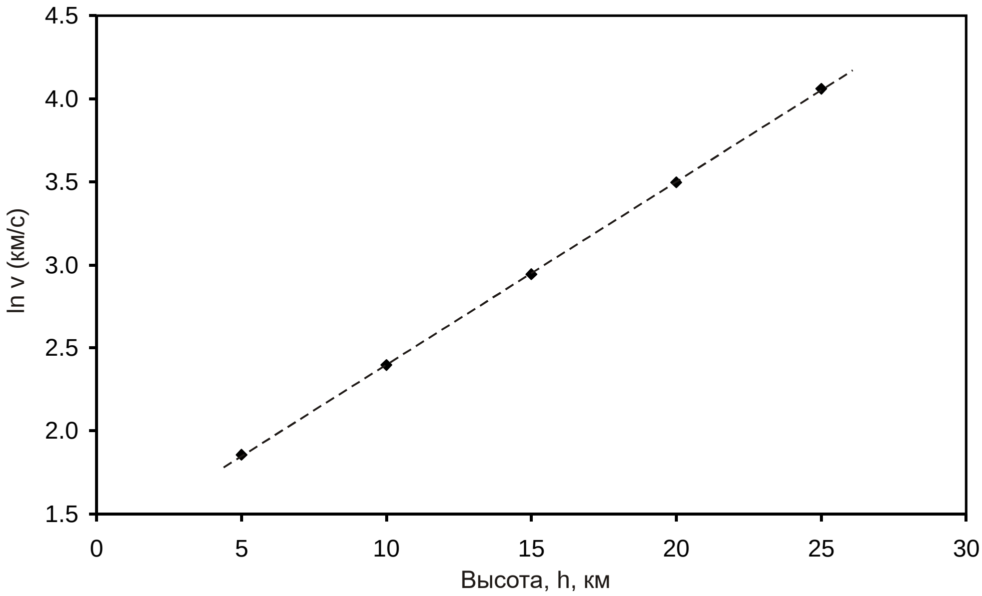
Множитель под корнем, умножаемый на скорость – постоянная величина. При логарифмировании он даст некоторое постоянное слагаемое к логарифму скорости (например, в метрах в секунду). В правой части уравнения мы видим высоту, умножаемую на постоянный фактор, в который входит температура. Таким образом, для решения задачи нам достаточно определить скорость снижения аппарата на некотором диапазоне высот h и построить зависимость $\ln v$ от h, которая должна оказаться линейной:

$$ln\, v = C \cdot h + const$$

Из коэффициента C мы сможем определить температуру.



Скорости определяются по линиям, касательным к кривой, приведенной в условии. Возьмем для примера пять высот от 5 до 25 км с шагом 5 км. Вычисляя натуральные логарифмы скоростей, строим их зависимость от высоты:



Зависимость действительно линейная, и ее коэффициент C равен

$$C = \frac{\mu \cdot g}{2\Re T} = 0.11\ км^{-1} = 1.1 \cdot 10^{-4}\ м^{-1}.$$

Планета похожа на Землю, поэтому ускорение свободного падения g мы принимаем равным 9.8 м/с$^{-2}$. Молярная масса молекулярного азота μ равна 0.028 кг/моль. Теперь мы можем определить температуру:

$$T = \frac{\mu \cdot g}{2\Re C} = 150\ K.$$

При своей кажущейся простоте, подобный метод измерения температур не потерял актуальности и используется даже на Земле, точнее в ее мезосфере и нижней термосфере. Там не используется парашют, а в качестве пробного тела выступает легкая сфера с радиомаяком. Методика вошла в литературу под названием «метод падающей сферы» и считается одним из самых точных локальных способов измерения температуры в верхней атмосфере. Разумеется, равновесная модель при обработке результатов там не применяется.

Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Указание, что решение можно вести в равновесной модели. Если это делается без обоснования – за этап выставляется 1 балл (дальнейшие этапы оцениваются в полной мере), если говорится о малых скоростях или ускорении, существенно меньшем ускорения свободного падения – этап засчитывается полностью.

Участник вправе не делать это предположение, а производить вычисления в общем виде. Это усложняет решение, но к нему предъявляются такие же требования по точности.

2 этап – 4 балла. Восстановление связи скорости движения аппарата и высоты с учетом распределения Больцмана. Участник может по-другому записывать постоянные множители в выражении для скорости, обязательным должен быть экспоненциальный множитель с правильным выражением. При отсутствии там коэффициента 2 (и – как следствие – итогового завышения температуры в 2 раза) за этап выставляется 1 балл, остальные оцениваются в полной мере. При отрицательном коэффициенте перед высотой в показателе экспоненты в выражении для скорости (не концентрации) этап не засчитывается.

3 этап – 4 балла. Восстановление данных о скорости аппарата на разных высотах. Для достижения нужной точности имеет смысл определить скорость хотя бы на трех – четырех высотах. При использовании только двух высот оценка уменьшается на 2 балла. При этом последующий этап оценивается, исходя из итоговой точности температуры.

4 этап – 5 баллов. Определение температуры атмосферы планеты, точность 10K. При превышении погрешности оценка уменьшается на 1 балл за каждые 10K дополнительной погрешности, при этом оценка за этап не может быть меньше нуля.

Комментарий: Участник может выполнять решение по-другому: при желании и владении соответствующим аппаратом, он может получить прямую связь времени и высоты, исходя из свойств сопротивления воздуха и предположения о равновесии:

$$\frac{\mu \cdot g^{3/2}(t-t_0)}{2\Re T\sqrt{Kn_0}} = e^{-\frac{\mu g h}{2\Re T}} - e^{-\frac{\mu g h_0}{2\Re T}}.$$

Здесь t_0 – некоторое начальное время, h_0 – высота в этот момент. Это соотношение в принципе позволит ему не определять из графика скорости в конкретных точках, а работать прямо с диаграммой «время – высота». При условии правильного выполнения это оценивается полностью.