Задача 5. *Банковские кризисы* *(12 баллов)*

В свете Нобелевской премии по экономике 2022 г. и банковского кризиса в США в марте 2023 г. Всероссийская олимпиада по экономике не могла обойтись без задачи о банковских кризисах. Для ее решения достаточно понимания стимулов экономических агентов и того, что банк привлекает депозиты и выдает кредиты. Знания специализированных концепций, таких как банковский мультипликатор, не требуется.

а) *(3 балла)* Ключевым элементом кризиса являются *набеги вкладчиков на банки.* При этом ожидания банкротства определенного банка могут являться *самосбывающимися.* Объясните, как работают самосбывающиеся ожидания при набеге на банк.

б) *(3 балла)* Как развитие современных коммуникационных технологий влияет на то, насколько быстро происходит набег на банк? Ответьте, основываясь на ваших рассуждениях в пункте **а)**.

в) *(3 балла)* В экономической науке существует дискуссия о том, какая структура связей между банками более устойчива и минимизирует вероятность системного кризиса. В частности, рассматриваются две в некотором смысле противоположные структуры — *распределенная* и *кольцевая.* Они представлены на рисунке:

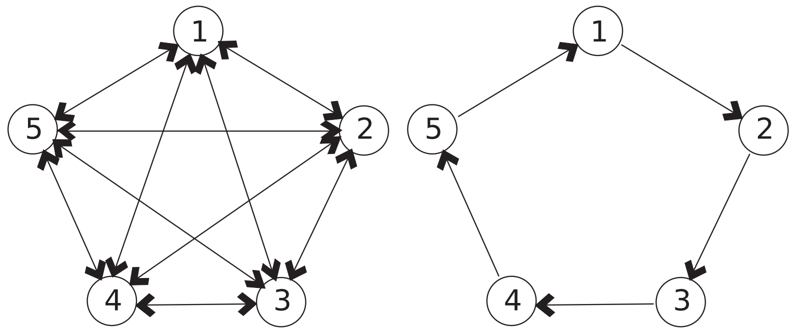

Рис. 5.1: Распределенная (слева) и кольцевая структуры связей между банками.

В *распределенной структуре* каждый банк связан с каждым — иными словами, каждый банк проводит операции (дает кредиты и берет депозиты) с каждым из остальных банков, причем в одинаковых объемах. При *кольцевой структуре* каждый банк дает кредиты одному банку, а принимает депозиты от другого, и так по кругу. То есть банк сохраняет у себя определенную долю в резервы, а остальную часть кладет на депозит в партнерский банк. Кроме изображенных на рисунке связей между банками, есть также и связь каждого банка с реальным сектором — банк берет депозиты у домохозяйств и выдает кредиты различным предприятиям. Из общих соображений кажется, что распределенная структура более устойчива, чем кольцевая. Основываясь на особенностях поведения банков, объясните, почему это может быть не так.

г) *(3 балла)* Из-за того, что фирмы, занимавшие деньги у разорившихся банков, будут вынуждены брать кредиты в других банках, общество будет нести издержки. Некоторые из этих издержек очевидны: это расходы на бумагу для новых договоров, и т. п. Опишите, какие еще издержки будет нести общество из-за того, что фирмы будут вынуждены брать кредиты в других банках.

Решение

а) Поскольку часть средств вкладчиков банк выдал в качестве кредитов, банк не может вернуть деньги всем вкладчикам единовременно. Если часть вкладчиков начинают ожидать, что банк А по какой-то причине разорится, то они начинают изымать из него деньги (закрывать депозиты), чтобы успеть изъять средства до того, как они закончатся (стать именно теми вкладчиками, кто получит деньги). Понимая это, те вкладчики, которые изначально не ожидали, что банк разорится, узнав о поведении первой группы вкладчиков, тоже начинают изымать деньги — чтобы успеть. В итоге для каждого вкладчика, независимо от того, ожидал он изначально, что банк разорится, или нет, становится рациональным действием изъять свои деньги. Как следствие, банк действительно разоряется, потому что денег изымают больше, чем банк способен в данный момент выдать. То есть банк сталкивается с невозможностью удовлетворить текущие требования вкладчиков, значит объявляется неплатежеспособным (банкротом). Сам факт ожиданий банкротства первой группой вкладчиков привел к банкротству банка. Ожидания претворились в жизнь просто из-за того, что сформировались, поэтому они являются самосбывающимися.

б) Из ответа а) следует, что набег на банк тем масштабнее, чем быстрее одни вкладчики узнают о действиях других. Развитие соцсетей увеличивает скорость распространения такой информации. Рост скорости распространения информации, при сопутствующей вере агентов в нее, стимулирует все больше людей в единицу времени снимать свои средства со счета в банке.

Приложения для онлайн-банкинга тоже можно рассматривать как проявление развития коммуникационных технологий (коммуникация между агентом и банком). Интернет-банкинг упрощает изъятие средств, что может побудить «ленивых» вкладчиков (которые хотели бы снять деньги снять деньги, но им не хочется идти в банк или этот поход связан с слишком большими издержками) снять свои средства. Что при прочих равных увеличивает количество заемщиков, требующих средства в единицу времени. Также агенты не будут тратить время на поход в банк, а значит те, кто хочет снять деньги с депозитов сделают это сразу, как услышат убедительную для них негативную новость. Получается, что вкладчики более синхронно изымают свои средства, так как через приложение это делается быстро, что увеличивает количество заемщиков, требующих средства в единицу времени.

Поэтому развитие современных коммуникационных технологий увеличивает размер и скорость набега на банки.

в) Аргумент 1. Моральный риск. В распределенной системе каждый банк чувствует себя более застрахованным, чем в кольце, так как в случае проблем может перекредитоваться в большем числе других банков. Поэтому он изначально выбирает более рискованные инвестиции в реальный сектор. Так делает каждый банк, что может увеличивать общий риск системы по сравнению с кольцом. А это значит, что в полном графе системный кризис произойдет с большей вероятностью, чем в кольцевой. В данном случае это является проявлением проблемы морального риска.

Аргумент 2. Изъятие из предосторожности останавливает развитие кризиса в кольце, но не в распределенной системе. Во время банковской паники банки изымают друг из друга свои депозиты. Предположим, банк 1 обанкротился. Тогда банки, которые связаны с теми банками, которые инвестировали в банкрота, могут начать тянуть депозиты из таких банков, опасаясь, что из-за банкротства банка 1, связанные с ним начнут испытывать проблемы с ликвидностью. Поскольку в полном графе каждый банк связан со всеми, то при банкротстве одного все остальные начнут тянуть депозиты друг из друга, что приведет к мощному сокращению денежной массы, и нехваткой средств у банков для обеспечения текущих расчетов и требований. При системе кольца изъятие средств, наоборот, может помочь остановить распространение кризиса и уменьшить потери денежной массы. Более того, распространение кризиса останавливается на двух банках. Рассмотрим участок кольца, когда банк 3 банкротится:

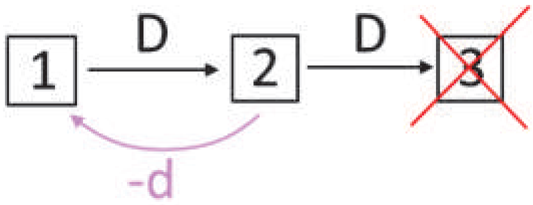

Рис. 5.2: Часть кольцевой системы

В таком случае банк 2 может начать испытывать проблемы с ликвидностью, так как он потерял средства, которые держал в банке 3. Банк 1 понимает это и начинает изымать свои средства из банка 2, что обозначено как $-d$. Таким образом он, с одной стороны, сам стимулирует банкротство банка 2 (случай самосбывающихся ожиданий), но с другой, создает себе дополнительный буфер ликвидности для того, чтобы устоять при банкротстве банка 2. В итоге, распространение кризиса может (зависит от того, на сколько большой буфер будет у банка 1) закончиться на вызванном банкротстве банка 2 вследствие банка 3 и всё. В таком случае банкротство одного банка затрагивает сокращение депозитов только в рамках трёх банков (1, 2, 3), а все остальные банки останутся нетронутыми. Для полного графа это неверно, в такой системе все банки затрагиваются паникой, а не только три, как в кольце. Например, при банкротстве банка 3, первый тоже был бы с ним связан и из него начали бы выводить средства паникующие банки, что увеличивает вероятность банкротства банка 1).

г) Существенные издержки связаны с потерей информации о фирмах, которой обладали обанкротившиеся банки. Эти издержки включают в себя:

- **Издержки из-за неоптимального распределения средств**. Из-за потери информации банкам будет сложнее принять правильное решение о том, какие именно проекты финансировать и в какой степени. В результате общая отдача от проектов для общества может оказаться существенно ниже максимальной, даже если не изменятся общий объем выданных средств и ставка процента.
- **Общее снижение производства из-за роста стоимости кредитования.** Из-за потери информации о фирмах другие банки согласны кредитовать их только под более высокий процент. Это происходит из-за роста премии за риск, ведь новые банки ещё не работали с этими фирмами, а значит не знают специфику

их бизнеса и их надежность как партнеров. Рост стоимости кредита оказывает давление на реальный сектор через канал издержек. Фирмы сокращают производство, падает выпуск в экономике — все общество недополучает доход.

Примечание 1: Потерю информации в результате банкротства банков изучал в своих работах Нобелевский лауреат 2022 г. Бен Бернанке, на примере Великой Депрессии.

Примечание 2: Если заемщиками являются физические лица, то проблема потери информации не так сильна, так как существуют бюро кредитных историй. Для фирм институт кредитных историй развит существенно хуже.

Схема проверки

Полный балл за пункт ставится только за полностью верное решение участника. Балл за пункт не ставится в случае:

- Любой (логической/теоретической/эмпирической) ошибки.
- Любого аргумента, основывающегося на нерациональном поведении агента.
- Вероятностного характера аргумента («может/возможно/наверное» и т.п.) без указания условий, при которых аргумент верен.

а) Типичные ошибки:

- Набег на банк ≠ бежать и вкладывать деньги.
- Отсутствие указания того, что агенты верят в плохую новость. При отсутствии веры в проблемы банка агент не сформирует дефолтных ожиданий на его счет, а значит не идет забирать средства из банка. Утверждение «негативная новость формирует ожидания дефолта банка» является неверным.
- Неверно предположение о том, что от самосбывающегося дефолта страдают только плохие банки.
- Нет связи между плохими новостями и действиями агентов.
- Не описан финальный этап — банк становится банкротом (не показано, что ожидания самосбылись).
- Сам по себе факт набега не означает, что банк обанкротится. Фразы «Может обанкротиться/возможно обанкротится/наверное обанкротится» не засчитывались за корректный аргумент. Банк обанкротится только при условии, что пришло забирать деньги больше вкладчиков, чем рассчитывал банк.
- Нет объяснения того, откуда берется уязвимость к панике (например, часть депозитов выдается в кредиты). Снятие депозитов — естественный процесс для любого банка. Необходимо указывать, что из-за паники и ожиданий вкладчики собираются снять больше, чем банк планировал (у него не хватит резервов).

б) Типичные ошибки:

- Не описан механизм того, как скорость передачи информации влияет на скорость набега вкладчиков.

в) Типичные ошибки:

- Банк без денег объявляется банкротом.
- «Отразится на остальных банках» — слишком общее утверждение.
- Клиенты банка-банкрота не идут требовать выплаты в другие банки.

- Искусственное банкротство: конструируется ситуация, в которой банк сам себе делает хуже, хотя мог бы этого не делать (нарушение предпосылки о рациональности).
- «В полном графе в случае банкротства страдают все, тогда как в кольце страдает только один»: в полном графе страдают все **но по чуть-чуть**, тогда как в кольце страдает только "сосед но в большей степени, так как эти банки сильно взаимосвязаны (сильнее). Этот аргумент, наоборот, соответствует позиции за распределенную систему.

г) Засчитывается любой аргумент, демонстрирующий конкретные издержки, которые несет общество в результате банкротства, и при этом не содержит (логической/теоретической/эмпирической) ошибки в рассуждении. Пример не должен быть частью перераспределения доходов.

Типичные ошибки:

- Пример является частью перераспределения доходов.
- Использование общих терминов без конкретизации: транзакционные издержки/издержки/нестабильность/неопределенность/выгодность и т.п.
- Указание на издержки, которые фирмы и так несут (несли бы) даже без банкротства банка. Например, время на заключение договора в новом банке, ведь договор нужно было бы заключать и со старым.
- Негативное последствие не следует непосредственно из банковского кризиса.

Задача 6. *КПВ в учебе* *(12 баллов)*

Рома — ученик старшей школы, который стремится прилежно учиться. Тем не менее, его силы ограничены. У Ромы есть 180 единиц жизненной энергии, которые он может инвестировать в изучение двух предметов — математики и информатики, по каждому из которых можно получить оценку от 0 до 100 баллов. Каждая единица энергии, потраченная на математику, дает 0,5 балла по математике. С информатикой сложнее: каждая единица энергии, потраченная на информатику, дает 1 балл до достижения оценки x баллов; затем каждая дополнительная единица энергии прибавляет к оценке по информатике лишь 0,5 балла. Обозначим за e_1 и e_2 количества энергии, потраченной на математику и информатику соответственно, за g_1 и g_2 — оценки по математике и информатике соответственно.

Величина x не является константой, а зависит от e_1 по следующему правилу: $x = 8\sqrt{e_1}$. Иными словами, чем больше энергии тратится на математику, тем позже наступает снижение производительности в изучении информатики.

а) *(4 балла)* Постройте КПВ Ромы в координатах (g_1, g_2). Выведите уравнение КПВ $g_2(g_1)$. Имейте в виду, что если Рома выучил некий предмет на g баллов, он может написать контрольную и хуже, если того захочет. КПВ может содержать горизонтальный участок.

б) *(4 балла)* Допустим, Рома посвящает учебе всего себя и максимизирует среднее арифметическое двух оценок. Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

в) *(4 балла)* Теперь допустим, что кроме оценок Рома в какой-то степени думает и об отдыхе. А именно, он максимизирует величину $(g_1 + g_2)/2 + e_3/3$, где e_3 — количество жизненной энергии, оставшееся после затрат энергии на учебу, Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

Решение

а) Формализуем условие. Ограничение на жизненную энергию имеет вид $e_1 + e_2 \leq 180$. Зависимость оценки за математику от потраченной на подготовку к ней энергии выглядит как $g_1 = \frac{1}{2}e_1$. В свою очередь, зависимость оценки за информатику от e_1 и e_2 имеет более сложный вид:

$$g_2 = \begin{cases} e_2, & e_2 \leq 8\sqrt{e_1} \\ \frac{1}{2}(e_2 - 8\sqrt{e_1}) + 8\sqrt{e_1}, & e_2 \geq 8\sqrt{e_1} \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что $e_1 = 2g_1$ и получим, что

$$g_2 = \begin{cases} e_2, & e_2 \leq 8\sqrt{2g_1} \\ \frac{1}{2}e_2 + 4\sqrt{2g_1}, & e_2 \geq 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Отсюда можно выразить обратную зависимость e_2 от g_2 на двух участках:

$$e_2 = \begin{cases} g_2, & g_2 \le 8\sqrt{2g_1} \\ 2g_2 - 8\sqrt{2g_1}, & 2g_2 - 8\sqrt{2g_1} \ge 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Значит, исходное ограничение на затраты энергии по подготовке к предметам может быть переписано в терминах g_1 и g_2 как

$$180 \ge e_1 + e_2 = \begin{cases} 2g_1 + g_2, & g_2 \le 8\sqrt{2g_1} \\ 2g_1 - 8\sqrt{2g_1} + 2g_2, & g_2 \ge 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Видно, что в целях поиска КПВ мы заинтересованы в строгом равенстве — в противном случае при фиксированном g_1 можно немного увеличить g_2, а значит, мы не на КПВ (если только мы не преодолели порог в 100 баллов для какого-то из предметов, что, как станет видно чуть дальше, не случится).

Предположим, что $g_2 \le 8\sqrt{2g_1}$. Тогда, если мы находимся на КПВ, выполнено, что $2g_1 + g_2 = 180$, откуда $g_2 = 180 - 2g_1$. Решая квадратное относительно $\sqrt{g_1}$ неравенство $180 - 2g_1 \le 8\sqrt{2g_1}$ можно получить, что $g_1 \ge 50$.

Теперь предположим, что $g_2 \ge 8\sqrt{2g_1}$. В таком случае, $2g_1 - 8\sqrt{2g_1} + 2g_2 = 180$, откуда $g_2 = 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$. Квадратное относительно $\sqrt{g_1}$ неравенство $90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1} \ge 8\sqrt{2g_1}$ совпадает с неравенством, рассмотренным выше, с точностью до знака, а потому его решением является множество $g_1 \le 50$.

Суммируя анализ двух участков можно заключить, что

$$g_2 = \begin{cases} 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}, & g_1 \le 50 \\ 180 - 2g_1, & g_1 \ge 50 \end{cases}$$

Наконец, заметим, что $90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$ — парабола ветвями вниз относительно $\sqrt{g_1}$ с максимумом в вершине, а значит сформулированая кривая возрастает до точки $\sqrt{g_1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow g_1 = 8$. Но тогда вместо выбора точки на кривой при $g_1 < 8$ Рома может просто перейти в точку $g_1 = 8$, увеличив тем самым g_2, и написать контрольные хуже при желании. Значит, КПВ Ромы имеет вид

$$g_2 = \begin{cases} 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}, & 8 \le g_1 \le 50 \\ 180 - 2g_1, & g_1 \ge 50 \end{cases}$$

Также корректным считается решение, где у КПВ Ромы добавляется горизонтальный участок от точки (0; 98) до точки (8; 98), что отображено на рис. 6.1.

б) Полезность Ромы равна

$$U = \frac{g_1 + g_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e_1}{2} + \frac{1}{2}\begin{cases} e_2, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ e_2/2 + 4\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases} = \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases}$$

Поскольку Рома будет тратить всю энергию на учебу, $e_2 = 180 - e_1$. С учетом этого

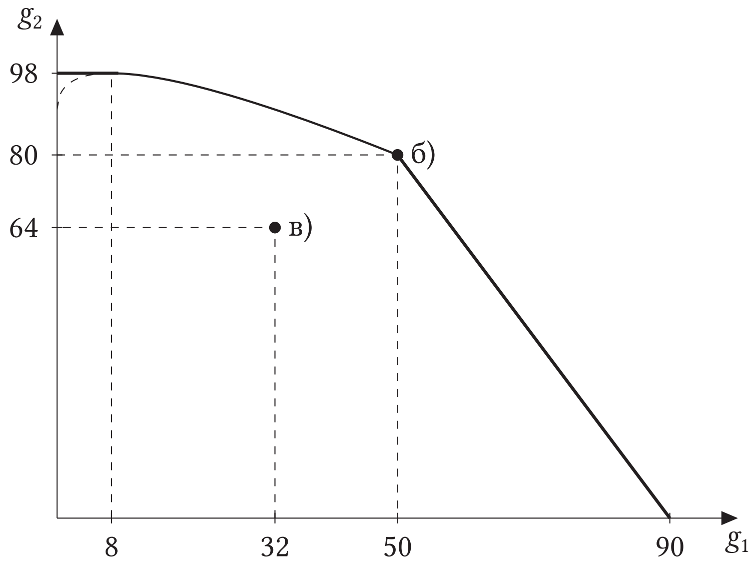

Рис. 6.1: КПВ Ромы и точки, выбираемые им в пунктах б) и в).

полезность перепишется как

$$U(e_1) = \begin{cases} e_1/4 + (180 - e_1)/2, & 180 - e_1 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ 45 + 2\sqrt{e_1}, & 180 - e_1 > 8\sqrt{e_1} \end{cases}$$

Как мы знаем, неравенство $180 - e_1 \leqslant 8\sqrt{e_1}$ эквивалентно неравенству $e_1 \geqslant 100$, так что

$$U(e_1) = \begin{cases} 45 + 2\sqrt{e_1}, & e_1 < 100; \\ 90 - e_1/4, & e_1 \geqslant 100. \end{cases}$$

Рома распределит энергию так, чтобы значение этой функции было максимально. Поскольку функция $45 + 2\sqrt{e_1}$ возрастает, а функция $90 - e_1/4$ убывает, значение $U(e_1)$ максимально при $e_1 = 100$. В результате Рома получит оценки $g_1 = e_1/2 = 50$, $g_2 = e_2 = 80$. Эта точка отмечена на рис. 6.1.

Ответ: $g_1 = 50$, $g_2 = 80$

в) Теперь полезность Ромы равна

$$U = \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{e_3}{3} = \frac{e_3}{3} + \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases}$$

Теперь мы не можем сказать, что $e_1 = 180 - e_2$, так как есть еще и e_3. Поскольку $e_3 = 180 - e_1 - e_2$, полезность можно переписать как

$$U(e_1,e_2) = \frac{180 - e_1 - e_2}{3} + \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases} =$$

$$= 60 + \begin{cases} e_2/6 - e_1/12, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ -e_2/12 - e_1/12 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases}$$

Рома максимизирует эту функцию по двум переменным e_1, e_2. Из-за специального вида этой функции максимизация по двум переменным здесь несложная. Действительно, заметим, что, каково бы ни было значение e_1, полезность возрастает по e_2 при $e_2 < 8\sqrt{e_1}$ и убывает по e_2 при $e_2 > 8\sqrt{e_1}$. Значит, в оптимуме всегда $e_2 = 8\sqrt{e_1}$, то есть Рома будет учить информатику ровно до снижения производительности. Подставляя $e_2 = 8\sqrt{e_1}$ в полезность, получаем функцию от одной переменной

$$U(e_1) = 60 + 8\sqrt{e_1}/6 - e_1/12.$$

Это парабола с ветвями вниз относительно $\sqrt{e_1}$, вершина находится в точке $(8/6)\cdot 6 = 8$. Значит, в оптимуме $e_1 = 8^2 = 64$, $e_2 = 8\sqrt{e_1} = 64$, $g_1 = 32$, $g_2 = 64$.

Эта точка отмечена на 6.1. Она находится под КПВ, что может быть необычным, но не является удивительным. Действительно, если Рома ценит отдых, вполне логично, что он не будет напрягаться на полную мощность, чтобы получать максимально возможную оценку g_2 при фиксированном g_1.

Ответ: $g_1 = 32$, $g_2 = 64$

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **4 балла**.

1. Линейный участок КПВ: $g_2 = 180 - 2g_1$ (или иное однозначное описание данного участка) — **1 балл**.
2. Нелинейный участок КПВ: $g_2 = 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$ — **1 балл**.
3. Точка излома: $(g_1, g_2) = (50, 80)$ — **1 балл**.
4. Анализ нелинейного участка и указание на горизонтальный (или отсутствующий, в зависимости от интерпретации) участок КПВ при $g_1 \leq 8$ — **1 балл**.
5. Отсутствие графика КПВ — **-1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **4 балла**.

1. Корректно записанная функции полезности на линейном участке КПВ — **1 балл**.
2. Получение оптимального значения $g_1 = 50$ на линейном участке КПВ — **1 балл**.
3. Корректно записанная функция полезности на нелинейном участке КПВ — **1 балл**.
4. Получение оптимального значения $g_1 = 50$ на нелинейном участке КПВ — **1 балл**.

в) Максимальная оценка за пункт — **4 балла**.

1. Корректно записанная КПВ в координатах (g_1, g_2) при фиксированном значении e_3 — **1 балл**.
2. Корректное доказательство того, что оптимум достигается в точке излома КПВ, то есть при $g_2 = 8\sqrt{2g_1}$ (или ссылка на пункт б)) — **1 балл**.
3. Корректно записанная функция полезности от одной (любой!) переменной — **1 балл**.
4. Получение оптимальных значений $g_1 = 32$, $g_2 = 64$ — **1 балл**.

Задача 7. *Торговля без денег* *(12 баллов)*

Каждый из семи островов A, B, C, D, E, F, G производит и потребляет все или некоторые из 2023 товаров. Будем обозначать через $d_{ij} \geqslant 0$ потребность острова i в товаре j, а через $s_{ij} \geqslant 0$ объем производства островом i товара j, где $i \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $j \in \{1, \ldots, 2023\}$. Величины d_{ij} и s_{ij} предопределены и неизменны. Между островами возможен обмен, но денег в экономике нет. Будем называть остров i *счастливым*, если для любого товара j его потребление на острове i не меньше, чем d_{ij}.

а) *(3 балла)* Предположим, что существует волшебник, который может свободно перераспределять произведенные товары между островами. Запишите условие на d_{ij}, s_{ij}, при котором волшебник может сделать так, чтобы каждый остров был счастливым. Докажите, что 1) если волшебник может каждый остров сделать счастливым, то это условие должно быть выполнено (ваше условие является необходимым), а также что 2) если ваше условие оказалось выполнено, то волшебник может сделать каждый остров счастливым (Ваше условие является достаточным).

б) *(6 баллов)* Теперь предположим, что волшебника нет, но острова могут обмениваться друг с другом. Каждый остров в рамках любой сделки с другим островом готов отдать свои товары только в обмен на такое же суммарное количество товаров (например, 5 яблок и 2 груши он готов обменять на 3 банана и 4 апельсина, $5 + 2 = 3 + 4$). Запишите условие на d_{ij}, s_{ij}, при котором острова смогут устроить торговлю (последовательность обменов) так, чтобы каждый остров был в итоге счастливым. Докажите, что это условие является необходимым и достаточным.

в) *(3 балла)* Наконец, предположим, что каждый остров i в рамках любой сделки с другим островом готов отдать свои товары только в обмен на такое же суммарное количество товаров, в которых сам нуждается, то есть таких товаров j, что $d_{ij} > s_{ij}$. Является ли достаточным условие, которое вы получили в качестве ответа в пункте **б)**, для того, чтобы острова смогли устроить торговлю так, чтобы каждый остров в итоге был счастливым?

Решение

а) Поскольку волшебник может свободно перераспределять все произведенные товары, необходимо всего лишь, чтобы суммарно на всех островах оказалось произведено как минимум такое количество товаров каждого вида, в котором испытывают потребность все острова суммарно. Иными словами, для всех $j \in \{1, 2, ..., 2023\}$ должно быть выполнено неравенство:

$$s_{Aj} + s_{Bj} + ... + s_{Gj} \geq d_{Aj} + d_{Bj} + ... + d_{Gj}$$

В противном случае найдется такой товар, что суммарный объем его производства меньше суммарной потребности в нем, а значит удовлетворить потребности всех островов в этом товаре путем перераспределения не удастся. Стало быть, это условие действительно является необходимым.

Если 2023 неравенства выполнены, то волшебник может собрать все произведенные товары со всех островов и выдать острову i d_{ij} единиц товара j, тем самым закрыв его потребность в данном товаре. Это верно для всех i и для всех j, коль скоро суммарные потребности островов в каждом товаре не больше, чем суммарный объем производства каждого товара, а значит и достаточное условие выполнено. Остатки можно распределить произвольным образом.

б) 2023 неравенства из предыдущего пункта все так же должны выполняться, потому что в противном случае хотя бы по одному товару суммарная потребность всех островов превышала суммарный запас ресурсов, а значит потребности всех островов в нем не смогли бы быть удовлетворены. Однако, одного этого условия теперь недостаточно.

Заметим, что в результате любого обмена суммарное количество товаров, которым обладает участвующий в обмене остров, не изменяется, потому что обмен предполагает передачу и получение одинакового количества товаров. Стало быть, если после обмена некоторый остров стал счастивым, то суммарный объем всех товаров в наличии у этого острова должен быть не меньше суммарной потребности этого острова во всех товарах — в противном случае острову не хватит товаров для удовлетворения потребности в одном из ресурсов. Значит, чтобы все острова удовлетворили свои потребности во всех товарах, необходимо, чтобы для всех $i \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$ были выполнены 7 неравенств:

$$s_{i1} + s_{i2} + \ldots + s_{i2023} \geq d_{i1} + d_{i2} + \ldots + d_{i2023}$$

Таким образом, получили систему из 2030 неравенств:

$$s_{Aj} + s_{Bj} + \ldots + s_{Gj} \geq d_{Aj} + d_{Bj} + \ldots + d_{Gj}$$

$$s_{i1} + s_{i2} + \ldots + s_{i2023} \geq d_{i1} + d_{i2} + \ldots + d_{i2023}$$

Докажем, что эта система и является искомым необходимым и достаточным условием.

Если не выполнено одно из первых 2023 неравенств, то потребность в некотором товаре как минимум для одного из островов не сможет быть удовлетворена из-за недопроизводства. Если не выполнено одно из последних 7 неравенств, то некоторому острову не хватит запаса ресурсов для покрытия своих нужд путем обмена. Таким образом, приведенные 2030 неравенств являются необходимым условием.

Проверим достаточность. Пусть все 2030 неравенств выполнены. Алгоритм обменов, который позволит сделать все острова счастливыми, может быть таким. Рассмотрим остров A. Пусть у него не хватает нескольких товаров (если остров A не испытывает недостатка ни в одном из товаров, перейдем к острову B). Рассмотрим произвольный из недостающих товаров k. Из предположения следует, что в сумме у всех остальных островов точно есть излишек товара k, способный покрыть дефицит острова A в нем. Кроме того, из предположения следует, что у острова A точно есть излишек других товаров в объеме не меньшем, чем дефицит товара k. Это означает, что остров A может последовательно обменяться с другими островами так, чтобы покрыть свой дефицит в товаре k, отдавая при этом товар, которого на острове A в излишке.

Проделаем эту же операцию со всеми остальными товарами, в которых у острова A наблюдается дефицит. После этого дефицит острова A будет закрыт. При этом у других островов не возникает дополнительного дефицита ни по какому товару. Проделаем эти же шаги для всех оставшихся островов, имеющих дефицит в некоторых товарах. После этого все острова окажутся счастливыми.

в) Нет, это условие не является достаточным. Предположим, что острова C, D, E, F, G не производят ни одного товара и не нуждаются ни в одном товаре (для них $d_{ij} = s_{ij} = 0$). Предположим, что остров A производит единицу первого товара и ничего больше, а также не нуждается в потреблении ни одного товара. Наконец, предположим, что остров B нуждается только в единице первого товара и производит только единицу второго товара. Формально, среди всех d_{ij} только $d_{B1} = 1$, и все остальные равны нулю, а среди всех s_{ij} только $s_{A1} = s_{B2} = 1$, и все остальные равны нулю. Тогда единственным нуждающимся островом оказывается остров B, чью потребность может закрыть лишь остров A, который, однако, не заинтересован в этом, потому что он уже счастливый. Тем не менее, в условиях пункта **б)** обмен бы состоялся, поскольку остров A мог бы обменять единицу первого товара на единицу второго товара от острова B, и все острова оказались бы счастливыми.

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**.

1. Корректно выписано условие — **1 балл**.
2. Корректно доказана необходимость — **1 балл**.
3. Корректно доказана достаточность — **1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **6 баллов**.

1. Корректно выписано условие — **2 балла**, из которых:
   - Корректно выписана система из 2023 неравенств (или ссылка на верное условие из предыдущего пункта) — **1 балл**.
   - Корректно выписана система из 7 неравенств — **1 балл**.
2. Корректно доказана необходимость условия — **1 балл**.
3. Корректно доказана достаточность условия — **3 балла**.

в) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**.

1. Корректно доказана недостаточность условия из пункта б) — **3 балла**.
2. При в целом правильной конструкции контрпримера определены не все d_{ij}, s_{ij} — **2 балла из 3**.

Задача 8. *Дважды оптимальная субсидия* *(12 баллов)*

Фирма-монополист производит товар «Штуки». Спрос на этот товар описывается уравнением $Q = 80 - P$. Средние издержки производства одной «Штуки» не зависят от выпуска и равны 20. Участник заключительного этапа олимпиады легко определит, что фирма выберет объем производства, равный 30, в то время как если бы рынок «Штук» был конкурентен, рыночный объем производства равнялся бы 60.

Как известно, в обычных условиях совершенно-конкурентный объем выпуска является еще и оптимальным с точки зрения общества. Государство захотело добиться того, чтобы фирма увеличила свой выпуск до этого уровня, то есть с 30 до 60. Один из способов сделать это — предоставить фирме субсидию, которая зависит от выпуска. Пусть $S = f(Q)$, где $Q \geqslant 0$ — объем проданной продукции, $S \geqslant 0$ — общая сумма выплачиваемой фирме субсидии. Проблема, однако, в том, что разные схемы субсидирования повлекут за собой разные расходы государства.

Если фирма безразлична между несколькими объемами выпуска, она выбирает наибольший из них.

а) *(2 балла)* Пусть $f(Q) = aQ$. Какое значение параметра a нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

б) *(2 балла)* Пусть $f(Q) = aQ^2$. Какое значение параметра a нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

в) *(8 баллов)* Допустим, государство может выбрать в качестве схемы выплаты субсидии *любую* функцию $S = f(Q)$, определенную для всех $Q \in [0; 80]$ и принимающую только неотрицательные значения, — например, $f(Q) = a\sqrt{Q} + bQ^3 + \frac{c}{Q+1}$, или $f(Q) = \begin{cases} aQ^4, & Q < 10; \\ bQ^4, & Q \geqslant 10, \end{cases}$ или любую другую (фантазия у государства безгранична). Как и прежде, функция должна быть такой, чтобы фирма продала 60 «Штук». Какую функцию нужно ввести государству, чтобы расходы на субсидию были минимальны? (Если таких функций несколько, приведите любую из них.) Чему равны эти минимальные расходы?

Решение

а) Составим функцию прибыли фирмы: $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + aQ$. Фирма максимизирует эту функцию по Q, оптимальный выпуск находится в вершине параболы: $Q^* = (60 + a)/2$. Нам нужно, чтобы этот выпуск равнялся 60, откуда $Q^* = (60 + a)/2 = 60$, $a = 60$, расходы равны $S = aQ = 60 \cdot 60 = 3600$.

Ответ: $a = 60$, $S = 3600$.

б) Теперь функция прибыли фирмы примет вид $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + aQ^2$. Фирма максимизирует эту функцию по Q, оптимальный выпуск находится в вершине параболы: $Q^* = 30/(1 - a)$. Нам нужно, чтобы этот выпуск равнялся 60, откуда $Q^* = 30/(1 - a) = 60$, $a = 1/2$, расходы равны $S = aQ^2 = 60 \cdot 60/2 = 1800$. Расходы при квадратичной субсидии получились меньше.

Ответ: $a = 1/2$, $S = 1800$.

в) Функция прибыли фирмы примет вид $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + f(Q) = 60Q - Q^2 + f(Q)$.

Будем решать задачу в два шага:

1. Докажем, что при любой схеме выплаты субсидии $S = f(Q)$, при которой фирма выбирает выпуск 60, расходы не меньше 900.
2. Приведем функцию $f^*(Q)$, при которой расходы равны 900.

Из утверждений 1 и 2 будет следовать, что $f^*(Q)$ является искомой оптимальной функцией (возможно, не единственной, но находить все оптимальные f^* не требуется).

Чтобы доказать оценку $S \geqslant 900$, заметим, что оптимальность выпуска 60 означает, что для любого $Q \geqslant 0$ должно выполняться

$$60 \cdot 60 - 60^2 + f(60) \geqslant 60Q - Q^2 + f(Q).$$

Отсюда для любого $Q \geqslant 0$

$$f(60) \geqslant 60Q - Q^2 + f(Q) \geqslant 60Q - Q^2 + 0,$$

где мы использовали неотрицательность $f(Q)$. Полученное неравенство является наиболее сильным при Q таком, что правая часть $60Q - Q^2$ максимальна, то есть при $Q = 30$. Значит, $f(60) \geqslant 60 \cdot 30 - 30^2 = 900$.

Можно было доказать оценку $S \geqslant 900$ и взяв альтернативный выпуск 30 сразу: в любом случае, для фирмы выпуск 60 должен оказаться не хуже, чем, в том числе, ее монопольный выпуск 30. Отсюда можно сразу получить неравенство $0 + f(60) \geqslant 900 + f(30) \geqslant 900$.

Теперь приведем пример функции $f(Q)$, такой что фирма выбирает выпуск 60 и расходы равны 900. Пусть

$$f^*(Q) = \begin{cases} 0, & Q \neq 60; \\ 900, & Q = 60. \end{cases}$$

Иными словами, субсидия платится только за выпуск 60 и в размере 900. При $Q \neq 60$, прибыль как и в отсутствие вмешательства равна $60Q - Q^2$, а при $Q = 60$ она равна 900. В итоге оба выпуска 30 и 60 будут давать прибыль 900, и она будет максимальной. По условию, фирма выберет наибольший из этих двух выпусков, то есть 60, и расходы будут равны 900. Значит, $f^*(Q)$ подходит.

Ответ: $f^*(Q)$ дана выше, $S = 900$.

Примечание 1: Конечно, подходит и множество других функций $f(Q)$, например
<

$$f(Q) = \begin{cases} 0, & Q < 60; \\ 900, & Q \geqslant 60. \end{cases}$$

Вообще, подойдет любая неотрицательная функция f, такая что:

1. $f(60) = 900$;

2. $f(Q) \leqslant Q^2 - 60Q + 900$ для любого $Q \leqslant 60$;
3. $f(Q) < Q^2 - 60Q + 900$ для любого $Q \in (60; 80]$.

Примечание 2: один из естественных, но неверных подходов к задаче такой: поскольку квадратичная субсидия оказалась лучше линейной, будем повышать степень. Нетрудно доказать, что при $f(Q) = aQ^n$ из равенства производной прибыли нулю получается, что нужно брать $a(n) = \frac{1}{60^{n-2}n}$, тогда расходы будут равны $\frac{3600}{n}$. Получается, что увеличивая n, мы можем получить сколь угодно малые расходы, что противоречит нашему ответу 900 выше. В чем проблема с этим рассуждением? Дело в том, что при $n \geqslant 4$ и $S = a(n)Q^n$ 60 не будет точкой максимума прибыли — равенства производной нулю для этого недостаточно.

Примечание 3: данная субсидия названа «дважды оптимальной», так как она приводит одновременно 1) к установлению оптимального для общества выпуска; 2) к минимальным расходам на выплату субсидии при достижении этого выпуска.

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **2 балла**.

1. Корректно полученное значение $a = 60$ — **1 балл**.
2. Корректно полученное значение $S = 3600$ — **1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **2 балла**.

1. Корректно полученное значение $a = 0.5$ — **1 балл**.
2. Корректно полученное значение $S = 1800$ — **1 балл**.

в) Максимальная оценка за пункт — **8 баллов**.

1. Оценка минимального размера государственной субсидии $S \geqslant 900$ — **6 баллов**, причем:
   - Недоказанное утверждение о том, что $S \geqslant 900$ — **2 балла**.
   - Частично корректное доказательство (например, недостаточные рассуждения о том, почему невозможно получить $S < 900$) — **4 балла**.
   - Полностью корректное доказательство оценки — **6 баллов**.
2. Пример функции $f(Q)$, для которой нижняя оценка $S = 900$ достигается — **2 балла**.