10 класс

10.1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T. (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр его описанной окружности, D, E, F — середины его сторон BC, CA, AB соответственно, так что DEF подобен ABC с коэффициентом $1/2$ и $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$.

Комментарий. Пусть ABC — данный треугольник, $A'B'C'$ — треугольник после поворота, $A'' = BC \cap B'C'$ и т.д. Оцениваются (но не суммируются) такие продвижения:

Доказано, что $(AA'B''C'')$ есть окружность (или эквивалентное) — 1 балл.

Доказано подобие $A''B''C'' \sim ABC$ (или эквивалентное) — 2 балла.

Доказано, что $(AA'B''C''O)$ есть окружность (или эквивалентное) — 2 балла.

Доказано, что $CB'A''$ — равносторонний (или эквивалентное) — 1 балл.

Только счёт углов (угол между соответствующими прямыми равен 60° и т.п.) — баллы не добавляются.

Пусть при повороте вокруг O по часовой стрелке на угол 120° точка D переходит в D'. При таком повороте прямая BC переходит в перпендикуляр к OD', проходящий через D', пусть этот перпендикуляр пересекает BC в точке K (см. рис. 3). Видим, что прямоугольные треугольники ODK и $OD'K$ равны (симметричны относительно OK), и поэтому $\angle KOD = \angle DOD'/2 = 60^\circ$, значит, в прямоугольном треугольнике KOD верно $OK = 2OD$. Иными словами, K получается из D в результате поворотной гомотетии: поворота с центром O по часовой стрелке на угол 60° и последующей гомотетии с центром O и коэффициентом 2. Аналогичный результат получим

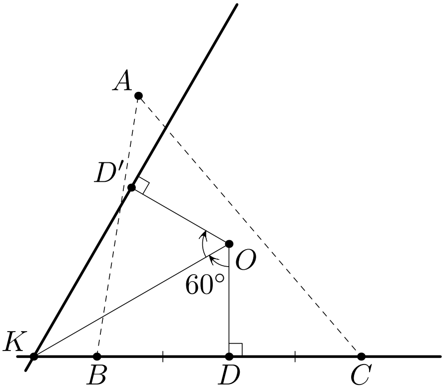

Рис. 3

для других точек L, M пересечения одноцветных прямых. Таким образом, треугольник KLM получается из DEF поворотной гомотетией с центром O и коэффициентом 2. Тогда KLM подобен DEF с коэффициентом 2, следовательно, равен ABC.

10.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых. (*А. Грибалко*)

Решение. На 1-м шаге у каждого из 100 человек было выписано одно из чисел множества $A_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.

На 2-м шаге — одно из чисел множества $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}\right\}$.

На 100-м шаге выписано одно из чисел множества $A_{100} = \left\{\frac{S}{100}, \frac{S-1}{100}, \frac{S-2}{100}, \ldots, \frac{S-100}{100}\right\}$, где $S = \frac{100\cdot 101}{2}$ — сумма всех чисел (а вычитается — число на оставшейся в конце карточке).

Видим, что $A_1 \cup A_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}, \frac{200}{2}\right\}$, так что $|A_1 \cup A_2| = 201$. Далее, $|A_{100}| = 101$, но числа $50 - \frac{1}{2}, 50, 50 + \frac{1}{2}$ принадлежат $A_2 \cap A_{100}$, значит, $|A_1 \cup A_2 \cup A_{100}| \leqslant 201 + 101 - - 3 = 299$.

Итак, мы показали, что 300 чисел, выписанных на 1-м, 2-м и 100-м шагах, могут принимать не более 299 различных значений. Следовательно, какие-то два из них равны.

Комментарий. Зафиксируем следующие продвижения:

(а) Выбираемые на первом шаге карточки различны.

(б) На втором шаге получаются целые и полуцелые средние арифметические.

(в) Остающиеся после последнего шага карточки различны.

(г) Не может быть такого, что кто-то взял на первом шаге карточку 50, и у кого-то после последнего шага осталась карточка 50.

Тогда следующие комбинации продвижений оцениваются следующим образом:

(а)+(б)+(в) без дальнейших продвижений — 0 баллов.

(а)+(б), при этом найдено количество элементов в объединении множеств возможных средних арифметических на 1 и 2 шаге — 1 балл.

(а)+(б)+(г) — 1 балл.

(а)+(в)+(г) — 1 балл.

(а)+(б)+(в)+(г) — 1 балл.

(а)+(б)+(в)+(г), при этом найдено количество элементов в объединении множеств возможных средних арифметических на 1 и 2 шаге — 2 балла.

Задача решена для набора чисел 1, 2, …, 101, но не сведена к исходной — 6 баллов.

10.3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geqslant 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

(*Т. Коротченко*)

Ответ. Существует при $b > 1$.

Решение. Легко видеть, что если $b = 1$, то всякий многочлен с коэффициентами от 0 до $b - 1$ является нулевым.

Пусть $b > 1$. Представим $a - b$ в b-ичной записи: $a - b = c_n b^n + \ldots + c_1 b + c_0$, где $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b - 1\}$. Поскольку $a - b \geqslant b$, в этой записи $n \geqslant 1$.

Покажем, что $P(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ удовлетворяет условию. Действительно, для любого многочлена f с целыми коэффициентами $f(a) - f(b)$ делится на $a - b$. Значит, $P(a) - P(b)$ делится на $a - b = P(b)$. Но тогда и $P(a) = (P(a) - P(b)) + P(b)$ делится на $P(b)$.

Комментарий. В решении упущен случай $b = 1$ — баллы не снимаются.

В решении, аналогичном официальному, не поясняется, почему полученный многочлен непостоянный — снимается 1 балл.

Замечено только, что $P(b)$ есть представление числа в b-ичной системе счисления — 1 балл.

Доказано только, что для $a = bq + r$ (деление a на b с остатком), и для многочлена $P(x) = (q - 1)x + r$ число $P(a)$ делится на $P(b)$ — 1 балл.

Предъявлен многочлен из официальных решений, но не доказано, почему он подходит — 3 балла.

Многочлен $P(x)$ получен из b-ичного представления числа a, после чего утверждается, что многочлен $P(x) - x$ подходит; при этом упущен случай, что коэффициент при x может оказаться равен -1 — 4 балла.

10.4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой — из n мальчиков. И девочки, и мальчики пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встаёт в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если n нечётно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечётными номерами. *(А. Грибалко)*

Решение. Будем изображать турнир в виде таблицы $n \times n$, в которой и столбцы, и строки пронумерованы числами от 1 до n. Столбцы будут соответствовать девочкам, а строки — мальчикам. Тогда каждая партия задаётся клеткой, координаты которой соответствуют номерам девочки и мальчика, играющих в этой партии. Поставим сначала фишку в клетку $(1, 1)$. После победы девочки фишка будет перемещаться вверх, а в случае победы мальчика — вправо. При этом если фишка доходит до края таблицы, то из последней строки при движении вверх она перемещается в первую строку, а из последнего столбца при движении вправо — в первый столбец. Тогда условие задачи равносильно тому, что фишка обошла все клетки таблицы, побывав в каждой ровно по одному разу.

Раскрасим клетки таблицы в n цветов по диагоналям, идущим вправо-вниз: первую диагональ — в первый цвет, вторую — во второй, $\ldots$, n-ю диагональ — в n-й цвет, а следующие диагонали — снова в цвета с первого по $(n-1)$-й. Заметим, что после каждой партии номер цвета клетки, в которой находится фишка, увеличивается на 1 по модулю n. Так как всего в турнире было проведено n^2 партий, что кратно n, то в конце фишка находится в клетке n-го цвета, то есть на главной диагонали (далее, говоря «диагональ», мы будем иметь в виду именно эту диагональ). Пусть финальная клетка в маршруте фишки расположена в столбце с номером m, тогда требуется доказать, что число m нечётно.

Из верхней клетки диагонали фишка не могла пойти вверх, так как уже была в клетке $(1, 1)$. Значит, если эта клетка не финальная, то из неё фишка пошла вправо. Тогда и из следующей клетки диагонали она сделала ход вправо, и т.д. до клетки, расположенной в столбце с номером $m-1$. Аналогично из клеток диагонали, находящихся в столбцах с номерами от $m+1$ до n, фишка ходила вверх (см. рис. 4). Пусть первая клетка диагонали, в которую попала фишка, находится в столбце с номером k. Рассмотрим путь фишки от начальной

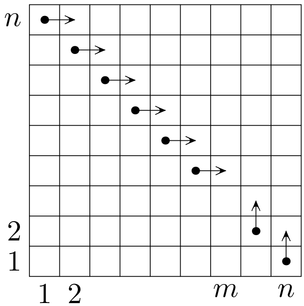

Рис. 4

клетки до неё. Все пути от клеток первого цвета до следующей клетки n-го цвета должны быть такими же, как и рассматриваемый путь, а именно, каждый такой путь получается из другого смещением на вектор $(1, -1)$. Действительно, если бы фишка из клетки $(a-1, b)$ сделала ход вверх, а из клетки $(a, b-1)$ — вправо, то в клетку (a, b) она бы не попала, а если из этих клеток она делала ходы вправо и вверх соответственно, то попала бы в одну клетку дважды; поэтому из каждых двух таких клеток фишка делала одинаковые ходы.

Без ограничения общности будем считать, что $k < m$. Клетки диагонали, находящиеся левее финальной клетки, будем называть *левыми*, а находящиеся правее — *правыми*. Пронумеруем левые клетки числами от 1 до $m-1$, а правые — от 1 до $n-m$ (и те, и другие нумеруем, двигаясь вправо-вниз). Посмотрим, в каком порядке фишка обходила эти клетки. С левых клеток она смещалась на k клеток вправо (поскольку с них в клетку первого цвета она делала ход вправо), а с правых клеток — на $k-1$ клетку вправо. Значит, для левых клеток нам важен лишь остаток от деления номера на k, а для правых — от деления на $k-1$. При этом, если правых клеток меньше k, то можно увеличить n на $2(k-1)$, добавив $2(k-1)$ правых клеток; это не повлияет на дальнейшие рассуждения. Для удобства заменим все номера клеток на соответствующие остатки, причём для правых клеток вместо остатка 0 будем использовать число $k-1$.

Пусть число m при делении на k даёт остаток d. Тогда первый переход с левых клеток на правые был с числа 0 на число $k-d$, и в этот момент все клетки с нулём в левой части были посещены. На диагонали остались только числа от 1 до $k-1$. Дальше цепочка переходов между правыми и левыми клетками выглядит так: $k-d \to \cdots \to d$. В этой цепочке каждое число от 1 до $k-1$ встречается два раза, начинается она на правых клетках, а заканчивается на левых. Переходы с правых клеток на левые будем называть переходами *первого типа*, а с левых на правые — *второго*. Тогда в цепочке $k-1$ переход первого типа и $k-2$ перехода второго, и они чередуются.

Докажем, что каждые два числа в цепочке, симметричные относительно её центра, дают в сумме k. Для крайних чисел это верно. Каждые два симметричных перехода имеют один тип, поэтому в них по модулю $k-1$ (для переходов первого типа) или по модулю k (для переходов второго типа) прибавляется одно и то же число. Значит, сумма следующих двух симметричных чисел (которые ближе к центру цепочки) снова равна либо 1 по модулю $k-1$, либо 0 по модулю k. Но сумма самих чисел не меньше 2 и не больше $2k-2$, поэтому она может быть равна только k.

Предположим, что число m чётно, и рассмотрим два случая.

1) Число k нечётно. Тогда центральный переход в цепочке имеет второй тип. У правой нижней клетки диагонали нечётный номер, поскольку число $n-m$ нечётно, а $k-1$ чётно. Левая верхняя клетка диагонали тоже имеет нечётный номер, поэтому при переходе первого типа чётность числа меняется. Пусть с числа 1 переход первого типа происходит на число $2s$. Тогда по модулю $k-1$ переходы первого типа выглядят так: $1 \to 2s$, $2 \to 2s+1$, $\ldots$, $k-1 \to 2s+k-2$. Суммы чисел в этих парах являются последовательными нечётными числами, поэтому при делении на $k-1$ они дают все нечётные остатки по два раза. В частности, есть переход, в котором сумма чисел равна 1 по модулю $k-1$. Как показано выше, эта сумма равна k. Но тогда для этого перехода симметричный ему тоже имеет первый тип и содержит те же самые числа, то есть один из переходов повторился, чего быть не должно.

2) Число k чётно. Тогда у центрального перехода в цепочке первый тип. Последняя левая клетка имеет нечётный номер, так как число $m-1$ нечётно, а k чётно. У первой правой клетки тоже нечётный номер, значит, при переходе второго типа чётность числа не меняется. Аналогично первому случаю можно показать, что среди них найдётся переход, пара чисел в котором даёт сумму k, и получаем такое же противоречие.

Замечание. После описания того, в каком порядке фишка обходит клетки диагонали (с левых сдвигается вправо на k клеток, а с правых — на $k-1$) решение можно завершить по-другому.

Пронумеруем все клетки диагонали числами от 1 до n слева направо. Проведём стрелку из каждой клетки в клетку, в которой фишка появляется в следующий раз; эти стрелки образуют путь, начинающийся в клетке k и заканчивающийся в клетке m. Добавим стрелку, ведущую из клетки m в клетку k; получим цикл, проходящий по всем клеткам диагонали.

Этот цикл определяет перестановку σ чисел $1, 2, \ldots, n$, где $\sigma(i)$ — это номер клетки, в которую ведёт стрелка из клетки i. Эта перестановка — цикл на n элементах. Напомним, что перестановка, являющаяся циклом на b элементах, имеет чётность, отличную от чётности числа b. Поэтому перестановка σ чётна.

С другой стороны, σ получается как композиция (последовательное применение) двух перестановок: τ, которая отправляет $x \mapsto x + (k-1) \bmod n$, и θ, действующей как $k \mapsto (k+1) \mapsto \mapsto (k+2) \mapsto \ldots \mapsto (m+k-1) \mapsto k$. Перестановка τ состоит из нескольких циклов одинаковой длины; поэтому эти циклы нечётной длины, и потому τ чётна. Значит, и θ чётна, что как раз и означает, что m нечётно.

Комментарий. В решении произведён переход к таблице $n \times n$ — 0 баллов.

Доказано только, что номера имеют одинаковую чётность — 0 баллов.

Сформулировано и доказано только, что сумма номеров даёт остаток 1 при делении на n; иными словами, что последняя клетка будет на главной диагонали — 1 балл.

Доказано, что во всех клетках одной диагонали, кроме главной, ходы были одинаковы — 1 балл.

Доказано, что все ходы из главной диагонали до конечной клетки направлены в одну сторону, а после — в другую — 0 баллов.

Доказано, что последняя клетка на диагонали, а также что разница между соседними посещениями клеток главной диагонали равна k или $k+1$ — 3 балла. Это продвижение не суммируется с предыдущими.