11 класс

11.1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. (*Н. Агаханов*)

Решение. Положим $a = \sin x + \operatorname{tg} x$ и $b = \cos x + \operatorname{ctg} x$. Введём обозначения: $u = \sin x + \cos x$ и $v = \sin x \cdot \cos x$. По условию рациональными являются числа $c = a + b = u + \frac{1}{v}$ и $d = a \cdot b = v + u + 1$. Отсюда $k = d - c = v + 1 - \frac{1}{v}$. Значит, $t = \sin 2x = 2v$ — корень квадратного уравнения $t^2 + 2t - (4 + 2kt) = 0$ с рациональными коэффициентами, откуда следует требуемое.

Комментарий. Деление на выражение, которое может обращаться в 0, при отсутствии разбора случая, когда оно равно 0 (как правило, в таких случаях получалось ошибочное утверждение, что $\sin 2x$ есть рациональное число) — не более 1 балла.

Ошибка в алгебраических преобразованиях, не влияющая на ход решения — снимается 1 балл.

11.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых. (*А. Грибалко*)

Решение. На 1-м шаге у каждого из 100 человек было выписано одно из чисел множества $A_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.

На 2-м шаге — одно из чисел множества $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}\right\}$.

На 100-м шаге выписано одно из чисел множества $A_{100} = \left\{\frac{S}{100}, \frac{S-1}{100}, \frac{S-2}{100}, \ldots, \frac{S-100}{100}\right\}$, где $S = \frac{100 \cdot 101}{2}$ — сумма всех чисел (а вычитается — число на оставшейся в конце карточке).

Видим, что $A_1 \cup A_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}, \frac{200}{2}\right\}$, так что $|A_1 \cup A_2| = 201$. Далее, $|A_{100}| = 101$, но числа $50 - \frac{1}{2}, 50, 50 + \frac{1}{2}$ принадлежат $A_2 \cap A_{100}$, значит, $|A_1 \cup A_2 \cup A_{100}| \leqslant 201 + 101 - 3 = 299$.

Итак, мы показали, что 300 чисел, выписанных на 1-м, 2-м и 100-м шагах, могут принимать не более 299 различных значений. Следовательно, какие-то два из них равны.

Комментарий. Зафиксируем следующие продвижения:

(а) Выбираемые на первом шаге карточки различны.

(б) На втором шаге получаются целые и полуцелые средние арифметические.

(в) Остающиеся после последнего шага карточки различны.

(г) Не может быть такого, что кто-то взял на первом шаге карточку 50, и у кого-то после последнего шага осталась карточка 50.

Тогда следующие комбинации продвижений оцениваются следующим образом:

(а)+(б)+(в) без дальнейших продвижений — 0 баллов.

(а)+(б), при этом найдено количество элементов в объединении множеств возможных средних арифметических на 1 и 2 шаге — 1 балл.

(а)+(б)+(г) — 1 балл.

(а)+(в)+(г) — 1 балл.

(а)+(б)+(в)+(г) — 1 балл.

(а)+(б)+(в)+(г), при этом найдено количество элементов в объединении множеств возможных средних арифметических на 1 и 2 шаге — 2 балла.

Задача решена для набора чисел 1, 2, ..., 101, но не сведена к исходной — 6 баллов.

11.3. В каждой строке таблицы $100 \times n$ в некотором порядке стоят числа от 1 до 100, числа в строке не повторяются (в таблице n строк и 100 столбцов). Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?

(*М. Антипов*)

Ответ. 2^{99}.

Решение. Сопоставим строке $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ чисел от 1 до 100 последовательность из 99 знаков $<$ и $>$ в соответствии с тем, как упорядочены соседние числа. То есть если $x_k < x_{k+1}$, то k-й знак в этой последовательности равен $<$, в противном случае он равен $>$. Заметим, что разрешённые операции над строкой не меняют соответствующую ей последовательность знаков. Действительно, из пары чисел x_k и x_{k+1} меняется не более одного и не более чем на 1. Поэтому знак неравенства между ними не может измениться на противоположный. Сопоставим каждой перестановке знаков расстановку чисел по следующему правилу (далее такие расстановки будем называть *выделенными*). При $k = 1, 2, \ldots, 99$ если $x_k > x_{k+1}$ (т.е. k-й знак $<$) поставим на место x_k наибольшее из не выбранных ранее чисел, если же $x_k < x_{k+1}$ — наименьшее из не выбранных ранее чисел. Заметим, что при такой последовательности операций числа, не выбранные за первые k шагов, будут образовывать отрезок натурального ряда (а выбранными окажутся несколько наибольших и несколько наименьших чисел от 1 до 100). В частности, $x_1 = 1$ или $x_1 = 100$. Число x_{100} заменим на единственное оставшееся число.

Нетрудно видеть, что полученная расстановка чисел соответствует выбранной последовательности знаков. Всего выделенных расстановок будет столько же, сколько и различных последовательностей знаков, то есть 2^{99}. В силу сказанного выше, разрешёнными операциями никакие две из выделенных строк разрешёнными операциями нельзя сделать одинаковыми. Таким образом, заполнив таблицу 100×2^{99} выделенными строками, мы получаем пример для $n = 2^{99}$.

Теперь докажем, что из любой строки A длины 100 можно получить выделенную строку B с той же расстановкой знаков. Из этого последует, что $n \leqslant 2^{99}$. Предположим, что первые $t-1$ знаков данной строки $A = (x_1, \ldots, x_{100})$ и выделенной строки $B = (y_1, \ldots, y_{100})$ совпадают. Если $t = 100$, то и сами строки совпадают. Пусть $t < 100$. Без ограничения общности будем считать, что $x_t < x_{t+1}$. В силу сказанного выше наборы чисел $y_t, \ldots, y_{100}$ и $x_t, \ldots, x_{100}$ совпадают и образуют отрезок натурального ряда с наименьшим числом x_t. Поскольку $y_t < y_{t+1}$, можно менять в строке A на месте t с числом на единицу меньшим, пока на месте t не окажется число x_t. Таким образом, мы добились совпадения первых t символов у нашей строки с выделенной строкой B. Значит, такими операциями можно из любой строки получить выделенную строку, что завершает доказательство оценки.

Комментарий. Баллы за все указанные ниже продвижения **не** суммируются.

Только ответ — 0 баллов.

Совершён переход к обратным перестановкам — 0 баллов.

Указан правильный набор представителей — 1 балл.

Указан правильный набор представителей и доказано, что от каждой перестановки можно перейти к какому-то представителю. Не доказано, что между представителями нельзя перейти — 3 балла.

Доказано (главное — сформулировано), что сохраняется последовательность знаков разностей соседних чисел — 2 балла.

Доказано, что $n \leqslant 2^{99}$ — 3 балла.

Незавершённая индукция — 0 баллов.

11.4. Окружность ω описана около треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MH. Прямые MH, BI и AB ограничивают треугольник T_b, а прямые MH, CI и AC ограничивают треугольник T_c. Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим точки пересечения прямой MH с прямыми AB, AC, BI и CI через P, Q, X и Y соответственно (см. рис. 6). Пусть прямые AI, BI и CI повторно пересекают ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Обозначим $\angle BAI = \angle CAI = \alpha$, $\angle ABI = \angle CBI = \beta$, $\angle ACI = \angle BCI = \gamma$, тогда $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ из суммы углов треугольника ABC. Поскольку $MH \perp AI$, имеем $\angle AQM = 90^\circ - \alpha$. Так как четырёхугольник

ABA_1C — вписанный, $\angle MA_1C = 90^\circ - \angle BCA_1 = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle MA_1C + \angle MQC = 180^\circ$, поэтому четырёхугольник A_1CQM — вписанный. Следовательно, $\angle AQA_1 = 90^\circ$. Аналогично $\angle APA_1 = 90^\circ$, откуда следует, что точки A, A_1, P, Q лежат на окружности γ, построенной на отрезке AA_1 как на диаметре.

Теперь заметим, что $\angle QC'C = \angle QYC = 90^\circ - \angle CIA_1 = 90^\circ - \alpha - \gamma = \beta$. Однако из вписанности четырехугольника $BC'CB_1$ мы получаем, что $\angle CC'B_1 = \angle B_1BC = \beta = \angle CC'Q$. Следовательно, точки C', Q и B_1 лежат на одной прямой. Аналогично, точки P, B' и C_1 лежат на одной прямой.

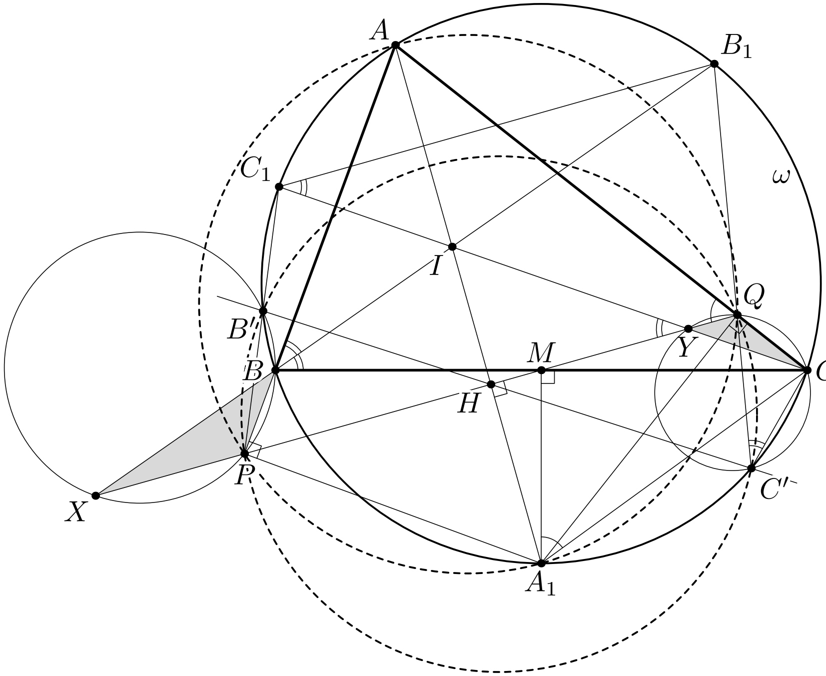

Рис. 6

В силу сказанного выше и вписанности четырёхугольника C_1B_1CB имеем, что $\angle CC_1B_1 = \beta = \angle CYQ$, поэтому $C_1B_1 \parallel PQ$. Поскольку четырёхугольник $B'C_1B_1C'$ вписанный, $\angle PB'C' = \angle C_1B_1C' = \angle PQC'$. Значит, четырехугольник $B'QC'P$ — вписанный. Тогда радикальные оси его описанной окружности, окружности γ и окружности ω пересекаются в одной точке, а это прямые $B'C'$, PQ и AA_1. Следовательно, точка H лежит на прямой $B'C'$, что и требовалось доказать.

Замечание. Приведём другой способ закончить решение после того, как установлено, что точки C', Q и B_1 лежат на одной прямой, и точки P, B' и C_1 лежат на одной прямой. Обозначим через N середину дуги BAC. Пусть прямая AX повторно пересекает окружность ω в точке T. Заметим, что $\angle CC'Y = \angle AQY = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2}\angle CC'B$. Следовательно, $C'Y$ — биссектриса угла $CC'B$, поэтому на прямой $C'Y$ лежит точка N. Аналогично, она лежит на прямой XB'. Применяя теорему Паскаля для точек $ATC'B_1BC$ мы получаем, что точка X, точка Q и точка пересечения $C'T$ и BC лежат на одной прямой. Следовательно, прямые BC, XQ и $C'T$ пересекаются в одной точке, то есть точка M лежит на $C'T$. Теперь применяем теорему Паскаля для точек $ATC'B'NA_1$ и получаем, что точки X и M вместе с точкой пересечения AA_1 и $B'C'$ лежат на одной прямой. Значит, точка H лежит на $B'C'$, что и требовалось.

Комментарий. Общие критерии по задаче отражены в группах (G), (M), (Z). Критерии трёх основных планов решения указаны под буквами (A), (B) и (C). Продвижения внутри одной из групп (A), (B), (C) суммируются, продвижения внутри разных групп не суммируются (выставляется максимальный балл за части (A), (B), (C)).

(G) В неоконченном счётном решении оцениваются лишь продвижения, явно сформулированные в работе и имеющие геометрический смысл.

(M) Отмечена и используется в решении точка пересечения прямых $B'C_1$ и B_1C', при этом полностью игнорируется случай, когда эти прямые параллельны — снимается 1 балл.

(Z) Далее сгруппированы продвижения, которые оцениваются в **0 баллов**.

(Z1) Отмечены точки C_1, A_1, B_1 (середины «меньших» дуг AB, BC, CA).

(Z2) Отмечена середина T дуги BAC.

(Z3) Счёт углов без построения новых точек, подобие треугольников T_b и T_c.

(Z4) Доказано, что AT, PQ, B_1C_1 параллельны, и все они перпендикулярны биссектрисе AI.

(Z5) Доказано, что пятёрки точек X, B', I, Q, C и P, B, I, Y, C' лежат на одной окружности.

(A) Схема оценивания официального решения (пересечение трёх радикальных осей).

(A0) Доказано, что четырёхугольники $PBMA_1$ и A_1MQC вписанные (или что PQ — прямая Симсона точки A_1 относительно треугольника ABC) — 0 баллов.

(A1) Явно сформулировано и доказано, что четырёхугольник APA_1Q вписанный — 1 балл.

(A2) Доказано, что точки P, B', C_1 лежат на одной прямой — 1 балл.

(A3) Доказано, что четырёхугольник $PB'QC'$ вписанный — 2 балла.

(B) Схема оценивания решения, в котором доказывается, что $B'C'H$ — прямая Симсона точки A_1 относительно треугольника XTY.

(B0) Доказано, что $XBYC$ вписанный — 0 баллов.

(B1) Доказано, что точка T лежит на XB' (и YC') — 1 балл.

(B2) Доказано, что TXA_1Q — вписанный четырёхугольник — 3 балла.

(C) Схема оценивания решения с помощью проективных отображений.

(C0) Доказано, что $BP = CQ$ — 0 баллов.

(C1) На AC отмечена точка V так, что $CQ = QV$, и доказано, что BV и AI перпендикулярны — 0 баллов.

(C2) Доказано, что прямые A_1Q и BV пересекаются в некоторой точке U, лежащей на окружности ω — 1 балл.

(C3) Основные свойства проективных отображений (двойное отношение четырёх точек сохраняется при центральной проекции, проективное отображение однозначно задается образами трёх точек и т.д.) считаются известными.