9.5. Если на столе лежит несколько кучек камней, считается, что на столе *много камней*, если можно найти 50 кучек и пронумеровать их числами от 1 до 50 так, что в первой кучке есть хотя бы один камень, во второй — хотя бы два камня, ..., в пятидесятой — хотя бы пятьдесят камней. Пусть исходно на столе лежат 100 кучек по 100 камней в каждой. Найдите наибольшее $n \leqslant 10\,000$ такое, что после удаления из исходных кучек любых n камней на столе всё равно останется много камней. (При удалении камней кучка не распадается на несколько.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. $n = 5099$.

Решение. Если удалить полностью 51 кучку, то, очевидно, не останется много камней. Значит, искомое значение n меньше 5100. (Альтернативно, можно удалить из всех кучек по 51 камню.)

Осталось показать, что при удалении любых $n = 5099$ камней останется много камней. Пусть в кучках осталось $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ камней соответственно; можно считать, что $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{100} \leqslant 100$. Покажем, что $a_{i+50} \geqslant i$ при $i = 1, 2, \ldots, 50$, то есть кучки с номерами от 51 до 100 удовлетворяют требованиям.

Пусть это не так, то есть $a_{i+50} \leqslant i-1$. при некотором $i \leqslant 50$. Это значит, что каждая из первых $i + 50$ кучек содержит не более $i-1$ камня, то есть из неё удалено хотя бы $101 - i$ камней. Поэтому общее количество удалённых камней не меньше, чем $(i + 50)(101 - i) = 5100 - (i - 1)(i - 50) \geqslant 5100$. Противоречие.

Комментарий. Пример, как при удалении 5100 камней может не остаться много камней — 1 балл.

Доказательство, что при любом удалении 5099 камней останется много камней — 6 баллов.

9.6. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифр 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифр 1, 4 и 7.

(*И. Ефремов*)

Решение. Каждому остатку a от деления на 19 сопоставим остаток $b(a)$ такой, что $b(a) \equiv 3a \pmod{19}$. Заметим, что остаткам $0, 1, 2, 3, 7, 8, 9$ сопоставлены остатки $0, 3, 6, 9, 2, 5, 8$ соответственно. Более того, по остатку b восстанавливается остаток $a = a(b) \equiv -6b \pmod{19}$ такой, что $a(b(a)) \equiv -18a \equiv a \pmod{19}$ и $b(a(b)) = b$ (из аналогичных соображений).

Обозначим теперь через $\mathcal{A}$ множество чисел из условия, не содержащих цифр $4, 5, 6$, а через $\mathcal{B}$ — множество таких чисел, не содержащих $1, 4, 7$. Каждому числу $A = \overline{a_{99}a_{98}\ldots a_0} \in \mathcal{A}$ сопоставим число $B = \overline{b(a_{99})b(a_{98})\ldots b(a_0)}$. Заметим, что $b(a_i)$ — цифра (причём $b(a_{99}) \neq 0$), так что получилось 100-значное число. Кроме того,

$$B = b_0 + 10b_1 + \ldots + 10^{99}b_{99} \equiv$$
$$\equiv 3(a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^{99}a_{99}) = 3A \pmod{19},$$

так что B делится на 19 и $B \in \mathcal{B}$. Поскольку разным числам из $\mathcal{A}$ соответствуют разные числа из $\mathcal{B}$, количество чисел в $\mathcal{B}$ не меньше, чем в $\mathcal{A}$.

Наконец, каждому числу $B = \overline{b_{99}b_{98}\ldots b_0} \in \mathcal{B}$ соответствует число $A = \overline{a(b_{99})a(b_{98})\ldots a(b_0)}$, которое по аналогичным причинам лежит в $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что количества чисел в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равны.

Комментарий. Не полностью описанное соответствие между числами — 0 баллов.

Недоведённое решение по индукции — 0 баллов.

Есть соответствие между разрешёнными (запрещёнными) цифрами с помощью умножения по модулю 19 — 1 балл.

Использование умножения по модулю 19 для построения отображения из некоторого множества 100-значных чисел, не покрывающее все разрешённые числа — 2 балла.

Не проверено, что соответствие сохраняет делимость на 19 — снимается 1 балл.

9.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC

пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая EC повторно пересекает окружность (ABC) в точке X, а прямая EA повторно пересекает окружность (ACD) в точке Y (мы разберём расположение точек, указанное на рис. 2; другие случаи рассматриваются аналогично).

Рассмотрим гомотетию с центром E, переводящую (ABC) в (ACD). При такой гомотетии точка X переходит в C, а точка A — в Y. Отсюда $AX \parallel YC$ и $\angle AEC = \angle AYC - \angle ECY = \angle AYC - \angle AXC$.

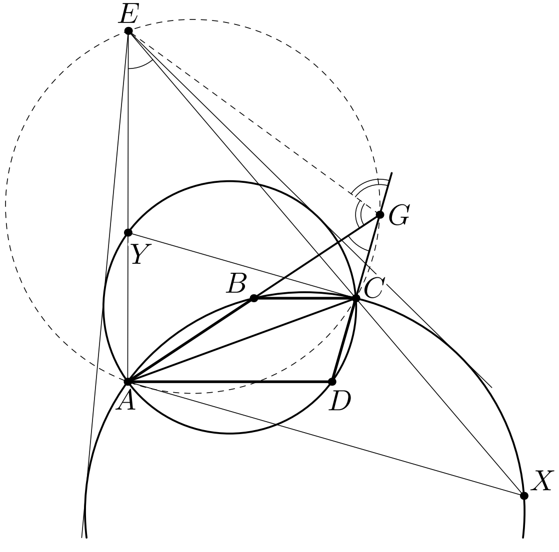

Рис. 2

Но $\angle AXC = 180^\circ - \angle ABC$ и $\angle AYC = 180^\circ - \angle ADC$. Значит, $\angle AEC = \angle ABC - \angle ADC = \angle ABC - \angle BCG = \angle BGC$. Из полученного равенства следует, что точки A, C, E, G лежат на одной окружности.

Поскольку точка E лежит на серединном перпендикуляре к

AC (т. е. на оси симметрии окружностей (ABC) и (ACD)), она является серединой дуги AGC окружности $(ACEG)$. Значит, E лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Аналогично показывается, что F также лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Замечание. У задачи есть следующее обобщение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, $G = AB \cap CD$, а M — вторая точка пересечения окружностей (ADG) и (BCG) (иначе говоря, *точка Микеля* этого четырёхугольника). Пусть E — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей (ABC) в (ADC). Тогда точки A, C, M, E лежат на одной окружности, причём E — середина дуги AC (т. е. ME — биссектриса угла между AM и CM).

Доказать это можно аналогично решению решении задачи: имеем (в направленных углах) $\angle AEC = \angle ABC + \angle ADC = \angle GBC + \angle AMG = \angle GMC + \angle AMG = \angle AMC$.

Комментарий. Получены результаты о конфигурации из центров окружностей и положении E и F относительно них (например, направления O_iO_j, подобие конструкции из центров и $ABCD$, $AE = EC$, $EO_1/EO_2 = r_1/r_2$, проекции EO_1 и FO_2 на AD равны, и эквивалентные продвижения) — баллы не добавляются.

Рассматриваются гомотетии, композиции гомотетий, применения теоремы о колпаках (без дальнейшего продвижения) — баллы не добавляются.

Показано, что отношения радиусов окружностей в парах равны (и равны отношению боковых сторон) — 1 балл.

Утверждается без доказательства, что EF есть внешняя биссектриса — 1 балл (может суммироваться с предыдущим).

Пусть $BA'D'C$ — образ $ABCD$ при гомотетии с центром G. Задача сведена к факту совпадения центров гомотетии пар окружностей (ABC), $(D'BC)$ и (DBC), $(A'BC)$ — 1 балл.

Задача сведена к доказательству того, что точки E, G, A, C лежат на одной окружности — 2 балла.

В решении при помощи движения точек указано недостаточное количество промежуточных точек, для которых следует проверить утверждение — не более 2 баллов.

9.8. У Пети есть 10 000 гирь, среди них нет двух гирь равного веса. Также у него есть чудо-прибор: если положить в него 10 гирь, он сообщит сумму весов каких-то двух из них (при этом неизвестно, каких именно). Докажите, что Петя может использовать чудо-прибор так, чтобы через некоторое время указать на одну из гирь и точно назвать её вес. (В чудо-прибор нельзя класть другое количество гирь.) (*С. Берлов, Т. Коротченко*)

Решение. Покажем, что Петя сможет определить вес одной гири, даже если у него 8 000 гирь. Положим $n = 4\,000$.

Лемма. *Для любых n гирь Петя может найти две гири, для которых он знает их суммарный вес.*

Доказательство. Пусть Петя положит в прибор по очереди все возможные наборы из 10 гирь из наших n. Заметим, что каждое показание прибора — это вес какой-то из C_n^2 пар гирь (будем говорить, что это показание *использует* эту пару). В то же время, Петя получит C_n^{10} показаний. Значит, одна из пар будет использована хотя бы

$$D = \frac{C_n^{10}}{C_n^2} = \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-9)}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10}$$

раз.

Иначе говоря, найдутся D измерений таких, что (1) в них прибор показывает один и тот же вес S, и (2) во всех десятках, использованных в этих испытаниях, есть две общих гири a и b. Мы покажем, что при выполнении условий (1) и (2) суммарный вес a и b обязательно равен S, то есть вес этой пары Петя и сможет определить по показаниям прибора. Назовём десятки гирь, участвовавшие в этих D измерениях, *нужными*.

Предположим противное: сумма весов a и b не равна S. Рассмотрим все пары из n гирь, суммарные веса в которых равны S (назовём эти пары *хорошими*). Поскольку веса всех гирь различны, хорошие пары не пересекаются; в частности, их не больше, чем $n/2$. При этом в каждой нужной десятке есть не только гири a и b, но и хотя бы одна хорошая пара. Оценим теперь общее количество нужных десяток.

Пусть в нужной десятке хорошая пара не содержит ни a, ни b. Любую такую десятку можно получить, добавив к гирям a и b хорошую пару (не более чем $(n-2)/2$ способами), а затем дополнив шестью из оставшихся $n-4$ гирь. Итого, количество таких десяток не больше, чем $\frac{n-2}{2}\,C_{n-4}^{6}$.

Во всех остальных нужных десятках хорошая пара содержит либо a, либо b. Если есть хорошая пара, содержащая a, то такая пара единственна. Для получения нужной десятки, содержащей эту пару, её надо дополнить гирей b и ещё семью гирями из оставшихся $n-3$; итого, таких нужных десяток не больше C_{n-3}^{7}. Аналогично, нужных десяток, содержащих хорошую пару с гирей b, тоже не больше C_{n-3}^{7}.

Итого, получаем

$$D \leqslant \frac{n-2}{2}\,C_{n-4}^{6} + 2C_{n-3}^{7} = \\ = D\cdot\left(\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4(n-3)} + \frac{8\cdot 9\cdot 10}{n-2}\right) < D\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = D.$$

Противоречие. □

Завершим решение задачи. Построим следующий граф. Сопоставим каждой гире вершину, Среди каждых n гирь найдём одну пару с известной суммой; две соответствующих вершины соединим ребром. Если в этом графе нет нечётных циклов, то, как известно, его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждое ребро соединяло вершины разных цветов. Но тогда вершин одного цвета не меньше n, и потому среди них мы провели ребро; противоречие.

Значит, в полученном графе есть цикл $w_1, w_2, \ldots, w_{2k+1}$, и Петя знает суммарные веса всех пар соседних гирь в этом цикле. Взяв полусумму всех этих весов, Петя узнаёт суммарный вес всех гирь цикла. Вычтя из него $(w_2+w_3)+(w_4+w_5)+\ldots+$ $+(w_{2k}+w_{2k+1})$, он узнает вес гири w_1.

Замечание. Оценивая чуть точнее, можно доказать лемму даже при $n = 2\,000$.

Комментарий. Доказательство того, что пары с одинаковой суммой не пересекаются — 0 баллов.

Доказательство того, что для победы достаточно найти нечётный цикл в графе из решения — 0 баллов.

Сведение задачи к лемме из решения (при $n = 5000$) — 1 балл.

Доказательство того, что один ответ прозвучал не менее C_n^{10}/C_n^2 раз — 1 балл.

Доказана лемма (возможно, при $n = 10000$) — 4 балла.

Во в целом верном решении при доказательстве леммы упущен случай, когда хорошая пара содержит a или b — снимается 2 балла.

Доказательство утверждения «если 9 элементов лежат в 10 десятках, на которые дали одинаковый ответ, то эти 9 элементов содержат пару с такой суммой» — 1 балл.