

10 класс

Первый день

- 10.1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T , покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T .
- 10.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.
- 10.3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geq 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?
- 10.4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой — из n мальчиков. И девочки, и мальчики пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встаёт в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если n нечётно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечётными номерами.