

11 класс

Второй день

- 11.5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша?
- 11.6. Плоскость α пересекает рёбра AB , BC , CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках X , Y , Z и T соответственно. Оказалось, что точки Y и T лежат на окружности ω , построенной на отрезке XZ как на диаметре. Точка P отмечена в плоскости α так, что прямые PY и PT касаются окружности ω . Докажите, что середины рёбер AB , BC , CD , DA и точка P лежат в одной плоскости.
- 11.7. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом k . Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени d , и пусть N_d — произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый.
- 11.8. В стране N городов. В ней действует $N(N-1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из X в Y для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена её обслуживания. Для данного $k = 1, \dots, N$ рассмотрим все способы выделить k городов и $N-k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовём *k -оптимальной*. Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до N так, что при каждом $k = 1, 2, \dots, N$ существует k -оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \dots, k$.