Задача №10-Е2. Насыщенный пар

Выдвинем поршень большого шприца в максимальное положение. Длина объема воздуха внутри шприца в этом случае составит $z = (7{,}9 \pm 0{,}1)$ см. Длина его шкалы, соответствующая $V_0 = (20{,}0 \pm 0{,}1)$ мл, составляет $z_0 = (6{,}9 \pm 0{,}1)$ см. Тогда объем воздуха внутри шприца составляет:

$$V = V_0 \frac{z}{z_0} = (22{,}9 \pm 0{,}7) \text{ мл}.$$

Оценим погрешность измеренного объема:

$$\Delta V = V_0(\varepsilon_z + \varepsilon_{z_0}) = 0{,}7 \text{ мл}.$$

Измерим площадь внутреннего сечения трубки. Для этого наберем в шприц объемом 1 мл жидкость. Наденем трубку на шприц, зальем небольшое количество жидкости в трубку, так чтобы поршень шприца встал в положение, соответствующее объему жидкости внутри шприца $v_1 = (1{,}00 \pm 0{,}01)$ мл. Сделаем отметку на трубке. Далее закачаем в трубку жидкость до момента, пока поршень не сместится до положения $v_2 = (0{,}10 \pm 0{,}01)$ мл. Вновь сделаем отметку на трубке. Измерим расстояние $l = (13{,}8 \pm 0{,}1)$ см между отметками на трубке с помощью линейки. Величина поперечного сечения трубки составит:

$$s = \frac{v_1 - v_2}{l} = (6{,}5 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$$

Запишем величину комнатной температуры $T_0 = (23 \pm 1)$ °C ≈ 296 K. Соберем установку, изображенную на рисунке.

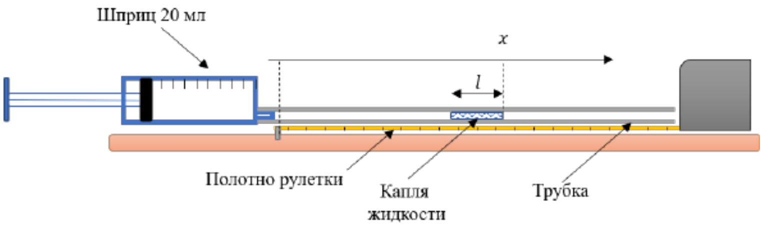


Рис. 1

Для этого закрепим на столе полотно рулетки с помощью скотча. Положим на полотно рулетки трубку, также закрепим ее скотчем. С помощью шприца объемом 1 мл поместим в трубку каплю жидкости на небольшом расстоянии от одного из концов трубки. Вставим в этот конец трубки кончик шприца объемом

20 мл. После подключения шприца к трубке сделаем отметку на трубке, соответствующую дальней от шприца границе капли жидкости. Следить за дальней от шприца границей капли необходимо по причине того, что при движении капли по трубке, капля может дробиться на более мелкие. Последнее приводит к тому, что часть воздуха попадает в пространство между вновь образованными каплями и смещение ближней к шприцу границы не отвечает изменению суммарного объема воздуха. Возьмем шприц в руку и засечем время на секундомере. Капля начнет движение по трубке в направлении от шприца. По прошествии 5 минут вновь сделаем отметку на трубке, соответствующую дальней от шприца границе капли. Измерим расстояние между отметками на трубке $l_d = (10{,}7 \pm 0{,}1)$ см. Будем предполагать, что воздух, вышедший из шприца в трубку, имеет температуру окружающей среды. Также известно, что давление внутри шприца и трубки равно атмосферному p_0. Запишем тогда условие сохранения количества воздуха внутри системы при изменении температуры воздуха в шприце:

$$\frac{p_0(V+V_t)}{T_0} = \frac{p_0(l_d s + V_t)}{T_0} + \frac{p_0 V}{T_h},$$

где V_t - объем воздуха внутри трубки до ее нагрева. Тогда для температуры воздуха внутри шприца после нагрева имеем:

$$T_h = \frac{T_0}{1 - \frac{s l_d}{V}} = 305{,}3\ \text{K} = (32{,}3 \pm 1{,}6)\ ^\circ\text{C}.$$

Для оценки погрешности преобразуем в первом порядке малости:

$$T_h - T_0 = T_0 \frac{s l_d}{V}.$$

Тогда абсолютную погрешность повышения температуры можно рассчитать как:

$$\Delta T_h = \Delta T_0 + (T_h - T_0)(\varepsilon_{T_0} + \varepsilon_s + \varepsilon_{l_d} + \varepsilon_V) = 1{,}6\ ^\circ\text{C}.$$

Отключим от трубки нагретый шприц. Поместим в трубку с помощью шприца объемом 1 мл каплю достаточно большого объема. Расположим каплю при этом достаточно близко к одному из концов трубки. Измерим ее длину $l_0 = (16{,}0 \pm 0{,}1)$ см. Подключим к этому концу трубки новый шприц объемом 20 мл. Сделаем отметку на трубке, соответствующую дальней от шприца границе капли, и запишем ее координату $x_0 = (31{,}5 \pm 0{,}1)$ см. Подключим к противоположному концу трубки шприц объемом 1 мл, предварительно наполнив его воздухом. Будем нажимать на поршень малого шприца так, чтобы капля начала движение к большому шприцу. Контролируя движение капли с помощью малого шприца, поместим таким образом каплю объемом приблизительно 0,2 мл в большой шприц.

Запустим секундомер. Вернем дальнюю от большого шприца границу капли в прежнее положение, чтобы выровнять давление в большом шприце, и отключим шприц объемом 1 мл от трубки. Капля при этом будет двигаться по трубке в сторону ее открытого конца, так как жидкость в шприце будет испаряться. Измерим зависимость координаты x капли от времени. После завершения измерения зависимости дадим капле растечься по стенкам шприца, подождем еще около минуты и запишем конечное положение капли $x_c = (56{,}3 \pm 0{,}1)$ см и ее длины $l = (14{,}0 \pm 0{,}1)$ см.

Определим давление насыщенного пара. Давление воздуха внутри системы равно атмосферному и складывается в каждой точке из давления сухого воздуха и давления паров жидкости. В конечном состоянии давление пара во всем объеме системы одинаково. Тогда запишем для этого случая равенство, связанное с постоянством количества сухого воздуха в системе:

$$p_0(V + (x_0 - l_0)s) = (p_0 - p_c)(V - (l_0 - l)s + (x_c - l)s).$$

Откуда для давления насыщенного пара при температуре $T_c = (23 \pm 1)$°C получаем:

$$p_c = p_0 \frac{(x_c - x_0)s}{V + (x_c - l_0)s} = (6{,}5 \pm 0{,}5)\ \text{кПа}.$$

Погрешность установившегося давления рассчитаем, пренебрегая погрешностью слагаемого $(x_c - l_0)s$ по сравнению с объемом шприца V:

$$\Delta p_c = p_c(\varepsilon_{p_0} + \varepsilon_s + \varepsilon_{x_c - x_0}) = 0{,}5\ \text{кПа}.$$

Заметим, что такое пренебрежение порядками малости не вносит в ответ изменения сравнимого с погрешностью.

Найдем значения давления пара в шприце в промежуточные моменты времени. Пар в трубке можно с большой точностью считать насыщенным. Давление же пара в шприце p еще не вышло на насыщение. Запишем для промежуточного момента времени равенство, связанное с сохранением количества сухого воздуха в системе:

$$p_0(V + (x_0 - l_0)s) = (p_0 - p_c)(x - l)s + (p_0 - p)(V - (l_0 - l)s).$$

Откуда для давления в шприце в промежуточный момент времени получаем:

$$p = \frac{-p_c(x - l)s + p_0(x - x_0)s}{V - (l_0 - l)s}.$$

Рассчитаем давление для каждой координаты и внесем результаты в таблицу.

t, с	x, м	p, кПа	$\ln \dfrac{p_c - p}{\text{кПа}}$	$\Delta \ln \dfrac{p_c - p}{\text{кПа}}$
30	33,0	1,6	1,59	0,02
40	34,0	2,0	1,51	0,02
50	34,8	2,3	1,44	0,02
60	35,5	2,5	1,38	0,02
70	36,3	2,8	1,31	0,03
80	37,0	3,1	1,24	0,03
90	37,5	3,2	1,18	0,03
100	38,1	3,5	1,11	0,03
110	38,6	3,6	1,05	0,03
120	39,0	3,8	1,00	0,03
140	39,8	4,1	0,89	0,04
160	40,5	4,3	0,78	0,04
180	41,0	4,5	0,69	0,04
200	41,5	4,7	0,59	0,05
220	42,0	4,9	0,49	0,05
240	42,4	5,0	0,40	0,05
270	42,6	5,1	0,35	0,06
300	43,0	5,2	0,24	0,06
330	43,4	5,4	0,12	0,07
360	43,6	5,4	0,05	0,07
390	43,8	5,5	-0,02	0,07
420	44,0	5,6	-0,10	0,08

В условии задачи описана модель испарения капли, в которой предполагается, что скорость испарения с поверхности капли постоянна, а скорость конденсации пропорциональна установившемуся над каплей давлению пара. Так как при давлении насыщенного пара концентрация молекул с течением времени над каплей неизменна, то в этот момент скорость испарения равна скорости конденсации. В соответствии с этой моделью для скоростей испарения и конденсации имеем:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{испарен}} = \alpha p_c$$
$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{конденсац}} = \alpha p,$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Тогда скорость изменения количества молекул над каплей:

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{испарен}} - \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{конденсац}} = \alpha(p_c - p).$$

Так как давление пара пропорционально концентрации молекул над жидкостью, то и скорость изменения давления пара над жидкостью пропорциональна скорости изменения количества молекул в газообразной фазе над жидкостью. Тогда для кинетики увеличения давления запишем:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(p_c - p)}{\tau},$$

где τ - некоторая константа, характеризующая скорость испарения.

Полученное дифференциальное уравнение достаточно распространено даже в школьной физике. Например, скорость изменения температуры в стакане с жидкостью, в которую помещен нагреватель постоянной мощности, описывается подобным законом (в случае теплопотерь, описывающихся законом Ньютона–Рихмана). По такому же закону устанавливается напряжение на конденсаторе, при подключении его к источнику постоянного напряжения. Для решения этого уравнения сделаем замену переменных $p' = p_c - p$. Тогда уравнение можно переписать в виде:

$$-\frac{dp'}{dt} = \frac{p'}{\tau}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем выражение:

$$\ln\frac{p'}{p'_0} = -\frac{t}{\tau},$$

где $p'_0 = p_c$ - значение переменной p' в начальный момент времени.

После обратной замены переменных:

$$\ln\frac{p_c - p}{p_c} = -\frac{t}{\tau}.$$

То есть измеренная ранее зависимость должна быть линейной в координатах $\ln(p_c - p)$ от t.

Пересчитаем ранее полученные значения и построим график в предложенных координатах.

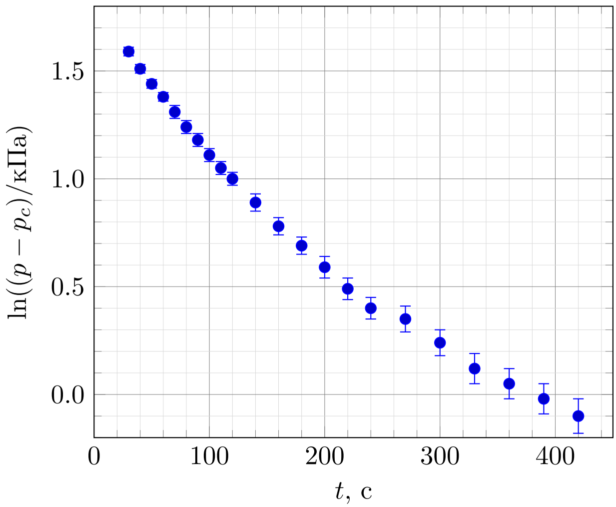


График зависимости разности давления насыщенного пара и давления пара в шприце от времени

Оценим погрешность экспериментальных точек. Для этого запишем расчетную формулу для разности давлений с учетом небольших пренебрежений в знаменателе точных формул.

$$p_c - p = \frac{p_0 s}{V}((x_c - x) + \frac{(x_c - x_0)(x - l)s}{V})$$

Погрешность логарифма этой величины равна относительной погрешности самой величины. При этом погрешность множителя $\frac{p_0 s}{V}$ при проверке модели не следует учитывать, так как это значение одинаково для всех точек. Его изменение приведет лишь к смещению всего графика, а не к изменению относительного положения точек. Тогда для погрешности логарифма разницы давлений имеем:

$$\Delta \ln(p_c - p) = \frac{\Delta x_c + \Delta x + \frac{(x_c - x_0)(x-l)s}{V}(\varepsilon_{x_c - x_0} + \varepsilon_{x-l} + \varepsilon_s + \varepsilon_V))}{(x_c - x) + \frac{(x_c - x_0)(x-l)s}{V}}$$

Проведение расчета погрешностей для каждой экспериментальной точки занимает крайне много времени, поэтому достаточно оценить погрешность лишь приблизительной трех точек графика на границах и в середине измеренного диапазона.

Видно, что точки не описываются прямой линией. Угловой коэффициент графика при малых временах больше, чем в конце. Можно сделать вывод, что предложенная модель не выполняется.

Также экспериментальные точки можно обработать и другим способом. Построим график зависимости давления от времени и проведем к графику касательные в нескольких точках.

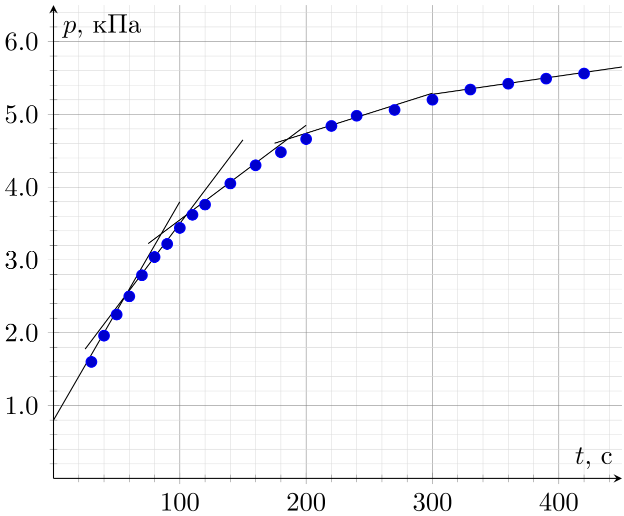


График зависимости давления пара от времени

Рассчитаем угловые коэффициенты касательных. И построим график зависимости производной давления по времени от величины давления.

p, кПа	$\dfrac{dp}{dt}$, Па/с
2.4	30
3.5	23
4.2	13
4.85	5.5
5.4	2.5

Видно, что построенный график можно описать линейной функцией, что согласуется с предложенной в условии моделью. Однако, экстраполяция графика

График зависимости скорости изменения давления от давления

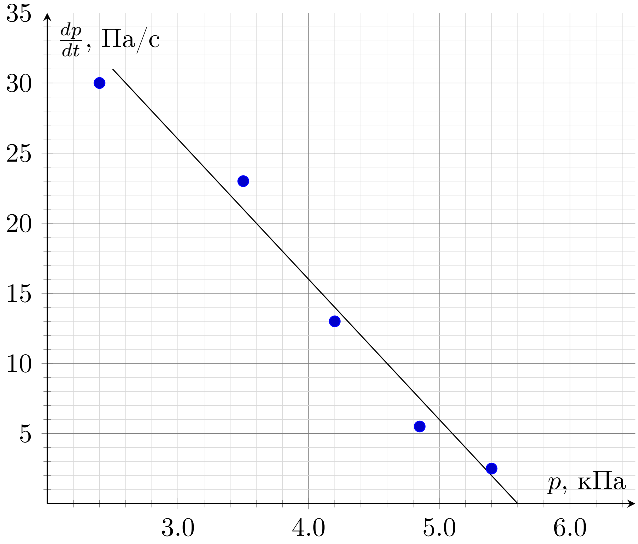


График зависимости скорости изменения давления от давления

показывает, что скорость изменения давления должна оказаться нулевой при давлении в 5.6 кПа, что меньше измеренного давления насыщенного пара. То есть по сути процесс испарения остановиться при давлении, соответствующем меньшей температуре поверхности жидкости.

Положим шприц с насыщенными парами жидкости в руку и вновь засечем время (не будем при этом отключать его от трубки после предыдущего опыта). Капля начнет движение в сторону от шприца. Такое поведение системы обуславливается двумя факторами. Расширением сухого воздуха в шприце за счет изменения его давления и увеличением давления пара жидкости в шприце. Подождем 5 минут и сделаем отметку на трубке. Запишем координату этой отметки $x_h = (78{,}5 \pm 0{,}1)$ см. Для записи связи этой координаты с давлением насыщенного пара в системе, будем предполагать, что воздух в шприце находится при температуре T_h, а воздух в трубке при температуре T_c.

$$\frac{p_0(V + (x_0 - l_0)s)}{T_c} = \frac{(p_0 - p_c)(x_h - l)s}{T_c} + \frac{(p_0 - p_h)(V - (l_0 - l)s)}{T_h}$$

Тогда для давления насыщенного пара жидкости при температуре T_h получаем:

$$p_h = p_0 - \frac{T_h}{T_c}\frac{p_0(V+(x_0-l_0)s)-(p_0-p_c)(x_h-l)s}{V-(l_0-l)s}.$$

Преобразуем формулу к более удобному виду. В первую очередь пренебрежем объемом капли $(l_0-l)s \approx 0.1$ мл по сравнению с объемом V.

$$p_h = -p_0\frac{l_d s}{V} + p_0\frac{T_h}{T_c}\frac{(x_h-x_0+l_0-l)s)}{V} - p_c\frac{T_h}{T_c}\frac{(x_h-l)s}{V}.$$

Каждое из слагаемых в сумме связано с определенным процессом, происходящем при нагревании. Так, первое слагаемое, связано с нагреванием сухого воздуха в шприце:

$$p_1 = -p_0\frac{l_d s}{V} = -(3{,}1 \pm 0{,}3)\ \text{кПа}.$$

Погрешность этого слагаемого оценим как:

$$\Delta p_1 = |p_1|(\varepsilon_{p_0} + \varepsilon_{l_d} + \varepsilon_s + \varepsilon_V) = 0{,}3\ \text{кПа}.$$

Второе слагаемое связано с заполнением воздухом трубки:

$$p_2 = p_0\frac{T_h}{T_c}\frac{(x_h-x_0+l_0-l)s}{V} = (14{,}7 \pm 1{,}3)\ \text{кПа}.$$

Погрешность этого слагаемого оценим как:

$$\Delta p_2 = p_2(\varepsilon_{p_0} + \varepsilon_{T_c} + \varepsilon_{T_h} + \varepsilon_{x_h-x_0+l_0-l} + \varepsilon_s + \varepsilon_V) = 1{,}3\ \text{кПа}.$$

Последнее слагаемое связано с тем, что трубка заполняется не сухим, а влажным воздухом.

$$p_3 = -p_c\frac{T_h}{T_c}\frac{(x_h-l)s}{V} = -(1{,}2 \pm 0{,}2)\ \text{кПа}.$$

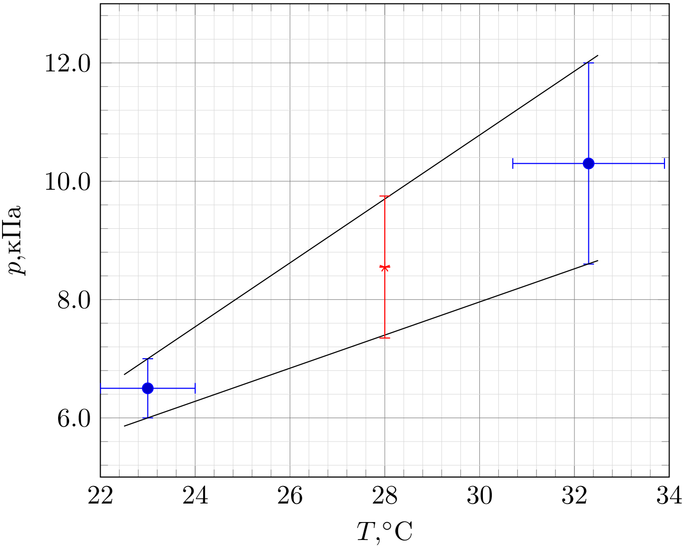
Погрешность этого слагаемого оценим как:

$$\Delta p_3 = p_3(\varepsilon_{p_c} + \varepsilon_{T_c} + \varepsilon_{T_h} + \varepsilon_{x_h-l} + \varepsilon_s + \varepsilon_V) = 0{,}2\ \text{кПа}.$$

Тогда давление p_h составит:

$$p_h = p_1 + p_2 + p_3 = (10{,}3 \pm 1{,}7)\ \text{кПа}.$$

Для расчета давления паров жидкости при температуре 28°C воспользуемся графическим методом. Поставим на координатной бумаге точки, соответствующие измеренным величинам $(T_c;\, p_c)$ и $(T_h;\, p_h)$. Проведем линии, через измеренные точки, по которым можно оценить значения давления при промежуточных температурах. Окончательно получим:



$$p_{28} = (8{,}7 \pm 1{,}2)\ \text{кПа}$$

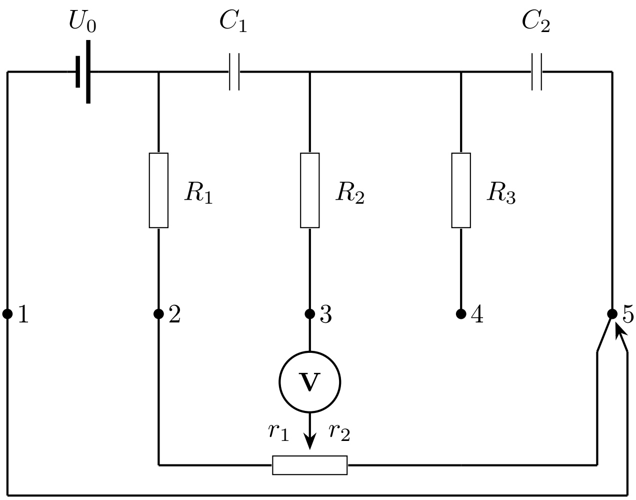
Задача №10-E2. Необычные мосты

1. Подключим мультиметр в режиме омметра (омметра) к выводам $3-4$ и измерим суммарное сопротивление резисторов R_2 и R_3. $R_{34} = (53{,}2 \pm 0{,}5)$ кОм $=$ $R_2 + R_3$. Это значение не противоречит контрольным параметрам чипа.

2. Подключим мультиметр в режиме вольтметра (вольтметр) к выводам $1-2$. $U_{12} = (3{,}28 \pm 0{,}03)$ В. Если внутреннее сопротивление вольтметра сильно больше сопротивления резистора R_1, то полученное значение является напряжением на источнике. Для проверки соединим выводы 2 и 3 источника друг с другом и подключим вольтметр к выводам 1 и 4. Теперь вольтметр подключен к источнику через три последовательно соединенных резистора. $U_{14} = (3{,}12 \pm 0{,}03)$ В. Разница в показаниях составляет примерно 5%, значит сопротивление вольтметра достаточно велико по сравнению с $R_1 + R_2 + R_3$, а если R_1 соответствует контрольным параметрам, то отклонение показаний вольтметра от напряжения источника составляет около 1%, так как R_1 примерно в 10 раз меньше, чем $R_1 + R_2 + R_3$. С учетом внутреннего сопротивления источника получим $U_{12} = U_0 = (3{,}28 \pm 0{,}06)$ В, что укладывается в допустимые параметры.

3. Для измерения R_1 подсоединим мультиметр в режиме амперметра (амперметр) к выводам $1-2$. $I_{12} = (688 \pm 7)$ мкА. Если считать амперметр идеальным,

то из Закона Ома получим $R_1 = U_0/I_{12} = 4{,}77$ кОм. Для проверки предположения об идеальности амперметра подключим параллельно ему крайние выводы потенциометра. Показания амперметра станут равны $I'_{12} = (673 \pm 7)$ мкА. Изменение тока составило примерно 2%, значит и сопротивление амперметра составляет порядка 2% от полного сопротивления потенциометра, равного 5 кОм. Оценочно сопротивление амперметра $R_A \approx 100$ Ом, что составляет около 1% от измеряемых сопротивлений. Можем считать амперметр идеальным. Оценим погрешность $\Delta_{R_1} = R_1(\Delta_{U_0}/U_0 + \Delta_{I_{12}}/I_{12}) = 0{,}14$ кОм. Окончательно получаем $R_1 = (4{,}77 \pm 0{,}14)$ кОм и этот параметр тоже укладывается в границы контрольных значений.



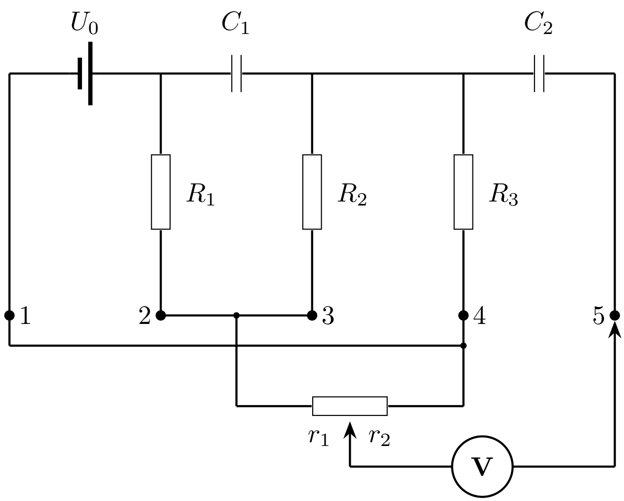
4. Для определения отношения емкостей соберем мостовую схему. Пусть первоначально конденсаторы разряжены. Разрядить их можно замкнув выводы $2-3$ и $4-5$. Проверить, что они разрядились можно с помощью вольтметра, подключив его к выводам $2-3$ и $4-5$. При соединении выводов $1-5$ в цепи начинает течь ток и при определенном положении движка потенциометра вольтметр будет стабильно показывать нулевое напряжение, это означает, что током через него можно пренебречь, тогда заряды на конденсаторах будут равными и отношение их емкостей будет обратно пропорционально отношению напряжений на них $C_2/C_1 = U_{C_1}/U_{C_2}$. Также напряжение на первом конденсаторе будет равно напряжению на резисторах R_1 и r_1, а на втором – напряжению на r_2. А учитывая равенство тока через все три резистора получим $C_2/C_1 = (R_1 + r_1)/r_2$. Три раза подберем такое положение потенциометра, не забывая каждый раз разряжать конденсаторы и рассчитаем отношение емкостей. Величины r_1 и r_2 будем

измерять омметром предварительно отсоединив потенциометр от сети.

№	r_1, кОм	r_2, кОм	C_2/C_1
1	$2{,}72 \pm 0{,}03$	$2{,}28 \pm 0{,}03$	3,29
2	$2{,}74 \pm 0{,}03$	$2{,}27 \pm 0{,}03$	3,31
3	$2{,}81 \pm 0{,}03$	$2{,}34 \pm 0{,}03$	3,24

5. Найдем отношение сопротивлений резисторов R_2 и R_3, для этого также соберем мостовую схему. Алгоритм действий следующий:

- при отключенном источнике замкнем выводы $4 - 5$, чтобы конденсатор C_2 разрядился;
- подключим источник (соединим выводы $1 - 4$);
- подключим вольтметр к выводу 5.



Если движок потенциометра установлен так, что $R_2/R_3 = r_1/r_2$, то показания вольтметра останутся нулевыми при подключении его к 5 выводу. Подберем такое положение потенциометра, затем с помощью омметра измерим r_1 и r_2 предварительно отсоединив потенциометр от цепи. Для повышения точности выполним эксперимент три раза.

№	r_1, кОм	r_2, кОм	R_2, кОм	R_3, кОм
1	$3{,}23 \pm 0{,}03$	$1{,}76 \pm 0{,}03$	34,37	18,73
2	$3{,}21 \pm 0{,}03$	$1{,}78 \pm 0{,}03$	34,15	18,94
3	$3{,}27 \pm 0{,}03$	$1{,}74 \pm 0{,}03$	34,79	18,51

Резисторы R_2 и R_3 не соответствуют контрольным значениям.