Задача №10-Т1. Кинематика поршня

1. По условию поршень легкий и перемещается в сосуде без трения. Следовательно, в любой момент времени давление газа по обе стороны от поршня одинаково. Для объёмов отсеков V_1 и V_2 справедливо равенство $V_1 + V_2 = 2V_0$, где V_0 – начальный объём отсека. Рассмотрим процесс, происходящий с газом за малый промежуток времени Δt, и запишем первое начало термодинамики для каждого отсека:

$$\begin{cases} q_1\Delta t = \frac{3}{2}\nu_1 R\Delta T_1 + p\Delta V, \\ -q_2\Delta t = \frac{3}{2}\nu_2 R\Delta T_2 - p\Delta V. \end{cases}$$

Запишем для каждого отсека уравнение Менделеева–Клапейрона и выразим изменение температуры:

$$\begin{cases} pV_1 = \nu_1 RT_1, \\ pV_2 = \nu_2 RT_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \nu_1 R\Delta T_1 = p\Delta V + V_1\Delta p, \\ \nu_2 R\Delta T_2 = -p\Delta V + V_2\Delta p. \end{cases}$$

Отсюда получим, что

$$\begin{cases} q_1\Delta t = \frac{3}{2}V_1\Delta p + \frac{5}{2}p\Delta V, \\ -q_2\Delta t = \frac{3}{2}V_2\Delta p - \frac{5}{2}p\Delta V. \end{cases}$$

Сложим и вычтем друг из друга записанные выше уравнения:

$$\begin{cases} (q_1 - q_2)\Delta t = 3V_0\Delta p, \\ (q_1 + q_2)\Delta t = \frac{3}{2}(V_1 - V_2)\Delta p + 5p\Delta V. \end{cases} \qquad (*)$$

Тогда для начального момента ($p = p_0$, $V_1 = V_2 = V_0$) получим $(q_1 + q_2)\Delta t = 5p_0\Delta V$. Отсюда, учитывая, что $\Delta V = Sv_0\Delta t$, найдём начальную скорость поршня v_0:

$$v_0 = \frac{q_1 + q_2}{5p_0 S}.$$

2. Если $q_1 = q_2 = q$, то задача упрощается, и из первого уравнения в $(*)$ находим, что $p = p_0 = \text{const}$. Из второго уравнения в $(*)$ получим $2q\Delta t = 5p_0\Delta V$. Это означает, что скорость движения поршня постоянна и равна $v = 2q/(5p_0 S)$.

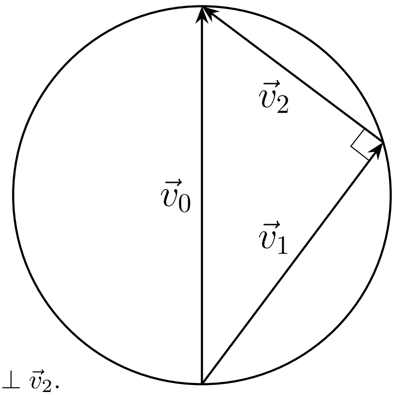
3. Если отношение объёмов $V_1 : V_2 = 3 : 1$, то $V_1 = 3V_0/2$, $V_2 = V_0/2$. Поскольку поршень в этом пункте задачи неподвижен, объём обоих отсеков со временем не меняется. Перепишем уравнения $(*)$, изменив знак у q_2 и учитывая, что в каждом отсеке происходит изохорный процесс ($\Delta V = 0$):

$$\begin{cases} (q_1 + q_2)\Delta t = 3V_0\Delta p, \\ (q_1 - q_2)\Delta t = \frac{3}{2}V_0\Delta p. \end{cases}$$

Из полученных уравнений следует, что

$$\frac{q_1 + q_2}{q_1 - q_2} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{3}.$$

Задача №10-Т2. Из лунки в поле



1. Воспользуемся законами сохранения импульса и энергии при соударении:

$$\begin{cases} m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 & \text{ЗСИ} \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2} & \text{ЗСЭ} \end{cases}$$

Возведем ЗСИ в квадрат получим:

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2.$$

С учетом ЗСЭ получим

$$2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \implies \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2.$$

Поскольку $v_1^2 + v_2^2 = v_0^2$ и $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, то треугольник скоростей является прямоугольным и вписан окружность с диаметром v_0.

Введём в точке старта систему координат yOx, где ось y направлена вертикально вверх, а ось x направлена горизонтально. Далее под $v_{x(i)}$ и $v_{y(i)}$ подразумеваются соответственно модули горизонтальной и вертикальной составляющих компонент скоростей i-го шарика сразу после удара. Отметим, что $v_{x(1)} = v_{x(2)} = v_x$.

Найдём дальность полета i-го шарика:

$$t_i = \frac{2v_{y(i)}}{g}, \quad l_i = v_x t_i \implies l_i = \frac{2v_x v_{y(i)}}{g}.$$

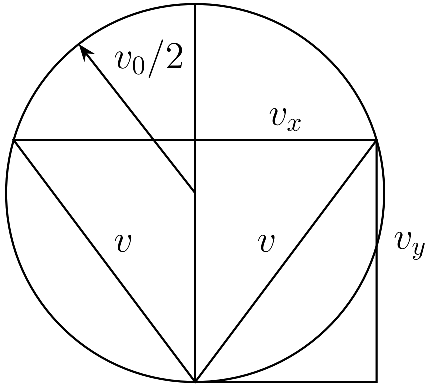
Для расстояния между точками падения шариков имеем:

$$l = l_1 + l_2 = \frac{2v_x\left(v_{y(1)} + v_{y(2)}\right)}{g} = \frac{2v_0 v_x}{g}.$$

Таким образом, расстояние между точками падения максимально при максимальном значении v_x, равном радиусу окружности или $v_0/2$. Таким образом, ответ на первый вопрос:

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

2. Максимальная дальность полета одного из шариков соответствует максимальному значению произведения $v_x v_{y(i)}$, следовательно будет одинаковой для обоих шариков. Произведение $v_x v_y$ геометрически представляет собой площадь прямоугольника со сторонами v_x и v_y. В свою очередь, данная площадь равна площади равнобедренного треугольника с равными сторонами $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и основанием $2v_x$. Этот треугольник вписан в окружность радиусом $v_0/2$. Максимум площади треугольника, вписанного в окружность радиусом R, достигается в случае равностороннего треугольника и равен:



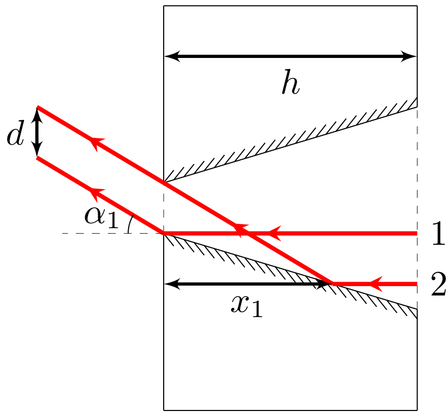
$$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \implies (v_x v_y)_{\max} = \frac{3\sqrt{3}v_0^2}{16},$$

откуда:

$$l_{i(\max)} = \frac{3\sqrt{3}v_0^2}{8g}.$$

Задача №10-Т3. Посеребренный конус

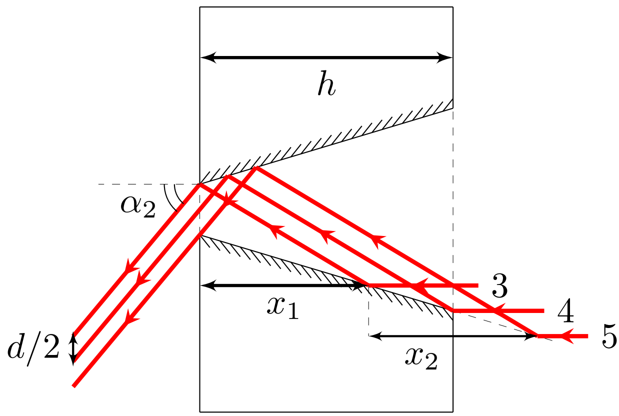
1. Рассмотрим пучок лучей, падающих на правое (по рисунку) основание конуса диаметром D. Часть лучей, идущих в пределах круга диаметром d с центром на оси конуса, проходит без препятствий и образует на экране круглое пятно того же диаметра $d_0 = d$.



Остальные лучи, прошедшие через входное сечение конуса, испытывают не менее одного отражения от боковой поверхности конуса. Поскольку оптическая схема имеет осевую симметрию, то эти лучи будут образовывать кольца, с центром в точке пересечения экрана осью конуса. Выясним количество и геометрию колец (радиусы и ширину колец, а также возможность их перекрытия друг с другом).

В дальнейшем будем рассматривать лучи, падающие на одну из образующих конической поверхности. Пусть α_0 – угол между направлением исходного пучка света и конической поверхностью отверстия. Из геометрии $\alpha_0 = (D-d)/2h = 3d/2h$. Заметим, что из условия следует $\alpha_0 \ll 1$.

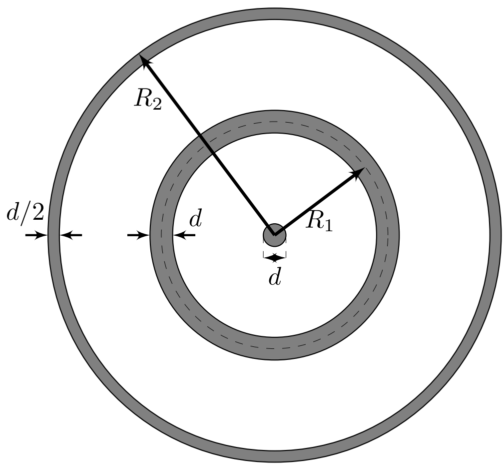
Рассмотрим луч 1 исходного пучка, падающий на самый край выходного сечения конуса и не отражавшийся до этого. После одного отражения он выйдет из отверстия под углом $2\alpha_0$ к начальному направлению.



Теперь рассмотрим луч 2, падающий на коническую поверхность максимально далеко от выходного отверстия и испытывающий ровно одно отражение до выхода из пластины. Найдем расстояние x_1 от места падения луча до левой поверхности пластины. Так как $\alpha_0 \ll 1$, то с хорошей точностью можем считать равным $\pi/2$ угол между конической поверхностью отверстия и поверхностью пластины. В таком случае $x_1 \approx d/\operatorname{tg}\alpha_0 = 2h/3$.

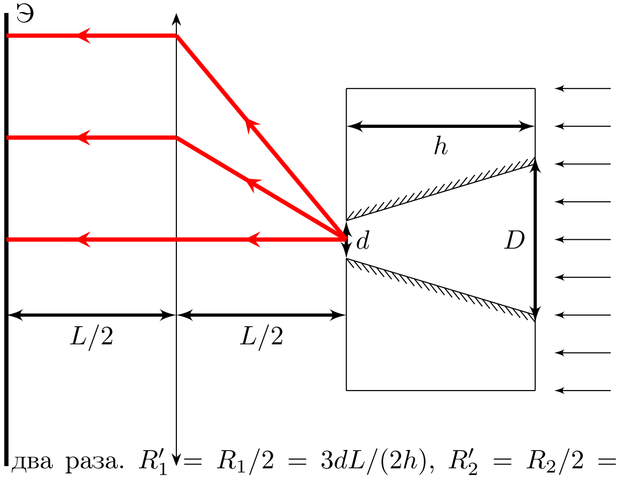
Эти лучи (с учетом симметрии) образуют на экране кольцо, толщина которого $d_1 = d$. Радиус средней линии кольца R_1 найдем рассмотрев ход луча, испытавшего одно отражение и вышедшего из центра выходного отверстия. Так как луч выходит под углом $\alpha_1 = 2\alpha_0$ к оси конуса, то $R_1 = L\operatorname{tg}\alpha_1 = 3dL/h$. Заметим, что $R_1 \gg d$ (толщины первого кольца и диаметра центрального пятна), что означает отсутствие пересечения первого кольца с центральным пятном.

Рассмотрим лучи, отразившиеся от конической поверхности отверстия дважды. Они выйдут из пластины под углом $\alpha_2 = 4\alpha_0$ и образуют на экране еще одно кольцо. Найдем расстояние x_2 между точками первого отражения предельных лучей из этой группы. Так как $\alpha_0 \ll 1$, то с хорошей точностью $x_2 = x_1 = 2h/3$. Как мы видим толщины пластины не достаточно для того, чтобы лучи, испытавшие два отражения, выходили в заданном направлении со всей площади выходного отверстия. Из хода пре-



дельных лучей 3 и 4 видно, что толщина второго кольца $d_2 = d/2$, а радиус внешней части второго кольца равен $R_2 = L\operatorname{tg}\alpha_2 = 6dL/h$.

2. Все вышедшие из отверстия пучки параллельных лучей соберутся в фокальной плоскости. Определить место их сбора можно следующим образом: так как $h \ll L$ и $d \ll h$, то можно считать, что все лучи выходят практически из одной точки, совпадающей с фокусом линзы, значит после преломления они будут идти параллельно главной оптической оси. Из рисунка видно, что в таком случае радиусы колец уменьшатся в два раза. $R'_1 = R_1/2 = 3dL/(2h)$, $R'_2 = R_2/2 = 3dL/h$.



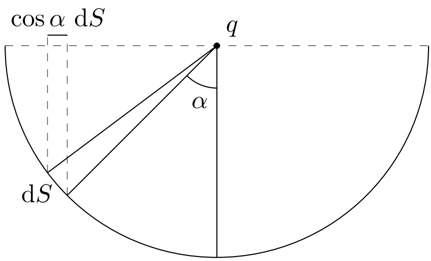
Определим как изменятся их толщины и диаметр центрального пятна.

Центральное пятно образуется параллельным пучком лучей, идущим вдоль главной оптической оси. Идеальная линза собирает такие лучи в точку, поэтому в приближении геометрической оптики размер центрального пятна будет много меньше d.

Кольца образуются также параллельными пучками лучей, которые идеальная линза собирает в фокальной плоскости, поэтому толщина колец тоже станет много меньше d.

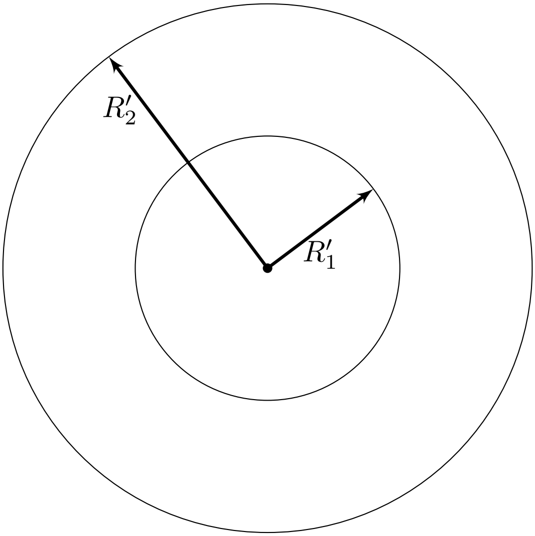
Задача №10-Т4. Полусферический конденсатор

1. Сила взаимодействия заряда и полусферы направлена вдоль оси вращения. Пусть α – угол между осью вращения и линией, проведённый из центра полусферы в её некоторую точку, а $\mathrm{d}S$ – малый элемент поверхности полусферы вблизи данной точки. Тогда получим:



$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cos\alpha = q\cdot\frac{\sigma\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\alpha = \frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\mathrm{d}S\cos\alpha.$$

Далее возможны два варианта рассуждений.



Первое решение: Величина $\mathrm{d}S\ \cos\alpha$ представляет собой проекцию элемента площади $\mathrm{d}S$ на основание. Поскольку величина r постоянна, суммирование проводится следующим образом:

$$F = \frac{q\sigma\sum \mathrm{d}S\ \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где $\sum \mathrm{d}S\ \cos\alpha = \pi r^2$ – площадь круга в основании полусферы.

Подставляя, находим:

$$F = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Второе решение: Рассмотрим взаимодействие заряда с тонкой кольцевой полоской. Для её площади $\mathrm{d}S$ имеем:

$$\mathrm{d}S = 2\pi R\ \mathrm{d}l,$$

где $R = r\sin\alpha$ – радиус полоски, а $\mathrm{d}l = r\ \mathrm{d}\alpha$ – её ширина.

Отсюда:

$$\mathrm{d}F_y = 2\pi R\ \mathrm{d}l \cdot \frac{q\sigma\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\sigma\sin\alpha\cos\alpha\ \mathrm{d}\alpha}{2\varepsilon_0}.$$

Учитывая, что $\cos\alpha\ \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(\sin\alpha) = \mathrm{d}t$, получим:

$$F_y = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\int\limits_0^1 t\ \mathrm{d}t.$$

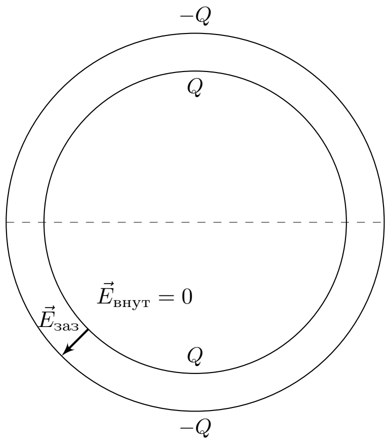
Интегрируя, находим:

$$F = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

2. Определим заряд Q на полусферах при напряжении источника U. Поскольку $d \ll R$ – электрическое поле заряда q в зазоре между полусферами можно считать постоянным по модулю и равным $E_q = q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$. Тогда напряжение, создаваемое зарядами полусфер, равно:

$$U_Q = U - U_q = U - \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Обратим внимание, что эта величина также постоянна. Опишем два способа определения электрического поля $E_{\text{заз}}$ в зазоре:



Первое решение: Мысленно достроим полусферы до сфер, равномерно заряженных по поверхности одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами $\pm 2Q$.

Тогда внутри сферы радиусом R электрическое поле равняется нулю во всех точках, а в зазоре между ними электрическое поле равняется:

$$E_{\text{заз}} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Поскольку $d \ll R$ – создаваемое добавленными полусферами электрическое поле пренебрежимо мало по сравнению с полным электрическим полем $E_{\text{заз}}$, поскольку при достаточно больших расстояниях от краёв эти полусферы ведут себя как одна с нулевым суммарным зарядом.

Второе решение: Поскольку радиусы сфер велики по сравнению с толщиной в зазоре и поскольку суммарный заряд системы равен нулю – электрическое поле в зазоре между полусферами с хорошей точностью можно приблизить электрическим полем внутри плоского конденсатора, поскольку поверхностные плотности заряда на полусферах по модулю практически совпадают. Отсюда:

$$E_{\text{заз}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0}.$$

Воспользовавшись выражением для электрического поля в зазоре, получим:

$$U_Q = \frac{Qd}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = U - \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

откуда находим:

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 R^2 U}{d} - \frac{q}{2}.$$

3. Поскольку заряды полусфер равны $\pm Q$, а их площади равны соответственно $2\pi R^2$ и $2\pi(R+d)^2$, для силы F электростатического взаимодействия заряда q с полусферами находим:

$$F = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+d)^2}\right) = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \left(1 + \frac{d}{R}\right)^{-2}\right) \approx \frac{qQd}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

В момент начала движения $F = mg$, откуда находим заряд $Q_{\max}$, при котором заряд q начинает движение:

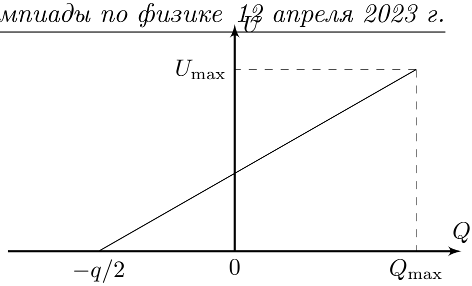
$$Q_{\max} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{qd}.$$

Подставляя связь Q и U, для напряжения $U_{\max}$ получим:

$$U_{\max} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{q^2 d}\right).$$

4. Для определения изменения электростатической энергии системы можно использовать два подхода – закон изменения энергии и вычисление её каждой компоненты.

Первое решение: Поскольку напряжение U между обкладками изменяется медленно, изменение электростатической энергии системы ΔW равняется работе источника по перемещению зарядов между обкладками.



Для её определения построим график зависимости $U(Q)$. При нулевом напряжении на источнике заряды на полусферах равна $\mp q/2$. Работа источника равна площади под этим графиком при изменении заряда полусфер от величины $-q/2$ до величины $Q_{\max}$. Эта площадь, в свою очередь, равна площади треугольника со сторонами $U_{\max}$ и $Q_{\max} + q/2$. Таким образом:

$$A_{\text{ист}} = \frac{U_{\max}}{2}\left(Q_{\max} + \frac{q}{2}\right),$$

и окончательно:

$$\Delta W = \frac{q^2 d}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{q^2 d}\right)^2.$$

Второе решение: Электростатическая энергия системы складывается из энергии взаимодействия W_C полусфер друг с другом и энергии взаимодействия W_q полусфер с зарядом q.

Выражение для энергии полусфер совпадает с выражением для энергии конденсатора:

$$W_C = \frac{Q^2}{2C} \qquad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 R^2}{d}.$$

Энергия W_1 взаимодействия одной полусферы с зарядом Q и радиусом r с точечным зарядом q, расположенным в её центре, равна:

$$W_1(r) = Q\varphi_q(r) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

откуда:

$$W_q = W_1(R) - W_1(R+d) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) \approx \frac{Qqd}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Тогда выражение для электростатической энергии системы W:

$$W = W_C + W_q = \frac{Q^2 d}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{Qqd}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q(Q+q)d}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Подставляя связь U и Q, находим:

$$W = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 R^2 U}{d}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2\right).$$

Таким образом, выражение для изменения электростатической энергии системы следующее:

$$\Delta W = \frac{q^2 d}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{q^2 d}\right)^2.$$

Третье решение: Рассмотрим произвольную систему точечных зарядов. Пусть q_i – точечный заряд с номером i, а φ_i – потенциал, создаваемый остальными зарядами в месте расположения заряда q_i. Тогда потенциальная энергия i-го заряда в поле остальных равняется:

$$W_i = q_i\varphi_i.$$

Если просуммировать величины W_i, то полученная сумму будет равна удвоенной электростатической энергии системы $2W$, поскольку в данной сумме каждое взаимодействие учитывается два раза. Таким образом:

$$W = \sum_i \frac{q_i\varphi_i}{2}.$$

Применяя последнее соотношение, получим:

$$W = \frac{\varphi_+ Q}{2} + \frac{\varphi_-(-Q)}{2} + \frac{\varphi_q q}{2},$$

где φ_+ и φ_- – потенциалы на поверхностях полусфер с зарядами Q и $-Q$ соответственно, а φ_q – потенциал поля полусфер в их центре.

Имеем:

$$W = \frac{UQ}{2} + \frac{q}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)}\right) \approx \frac{UQ}{2} + \frac{qQd}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Подставляя связь Q и U, находим:

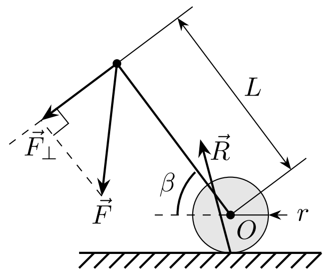
$$W = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 R^2 U}{d}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2\right).$$

Тогда для изменение электростатической энергии имеем:

$$\Delta W = \frac{q^2 d}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{q^2 d}\right)^2.$$

Задача №10-Т5. Об стену

1. Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с центром масс системы (центром шарика).



Рассмотрим силы, действующие на твердое тело «стержень + шайба 2». Со стороны стенки на шайбу действует сила $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F_{\text{тр}}}$, приложенная к точке контакта со стеной. На свободный конец стержня действует сила $\vec{F}$ со стороны шайбы 1. Также действует сила инерции, приложенная к центру масс тела (центру шайбы).

Запишем закон сохранения энергии. Кинетическая энергия тела в этой системе отсчета стремится к нулю, так как центр шайбы неподвижен, ее размер мал, а стержень невесомый. Тогда суммарная работа всех сил, а как следствие и суммарная мощность, равна нулю.

Сила инерции работу не совершает (центр масс не движется). Мощность силы $\vec{F}$ равна $P_F = F_\perp \cdot \omega L$. где ω - угловая скорость вращения стержня. Мощность силы $\vec{R}$ равна $P_R = -F_{\text{тр}} \cdot \omega r$. Знаки написаны в предположении вращения стержня против часовой стрелки.

$$F_\perp \cdot \omega L - F_{\text{тр}} \cdot \omega r = 0 \Rightarrow \frac{F_\perp}{F_{\text{тр}}} = \frac{r}{L} \ll 1.$$

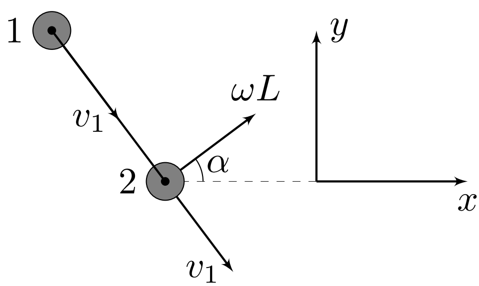
Следовательно, силу $\vec{F}$ можно считать направленной вдоль стержня. Теперь рассмотрим только стержень. На него действует сила $\vec{F}$ со стороны шайбы 1 и сила $\vec{F'}$ со стороны шайбы 2. Так как стержень невесомый, то $\vec{F} + \vec{F'} = \vec{0}$, откуда $\vec{F'} = -\vec{F}$, следовательно направлена вдоль стержня.

2. **Первое решение:**

Поскольку силы, действующие со стороны стержня на шайбы, можно считать направленными вдоль стержня, то в процессе соударения скорость шайбы 1 всегда направлена вдоль стержня. Данное утверждение не зависит от вида взаимодействия шайбы 2 со стенкой и применимо всегда.

Также данное утверждение можно доказать, используя закон сохранения момента импульса относительно точки контакта шайбы 2 со стенкой. Момент импульса шайбы 2 относительно выбранной точки можно считать равным нулю, поскольку размеры шайб малы. Тогда, поскольку до соударения момент импульса системы относительно выбранной точки равен нулю:

$$L_{\text{имп}} = 0 = mLv_{1\perp} \Rightarrow v_{1\perp} = 0.$$



Пусть v_1 и ω – скорость шайбы 1 и угловая скорость вращения стержня сразу после соударения соответственно. Поскольку стержень жёсткий – компонента скорости шайбы 2, направленная вдоль стержня, также равна v_1, а компонента скорости, перпендикулярная стержню, равна ωL.

Пусть m – масса одной шайбы. Поскольку трения между шайбой 2 и стенкой нет, то для системы выполняется закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось x, направленную вдоль стенки:

$$2mv_0 \sin\alpha = mv_1 \sin\alpha + m(v_1 \sin\alpha + \omega L \cos\alpha) \Rightarrow v_1 = v_0 - \frac{\omega L}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Поскольку удар упругий – для системы выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{2mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m(v_1^2 + \omega^2 L^2)}{2} \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - \frac{\omega^2 L^2}{2}.$$

Приравнивая выражения для v_1^2, получим:

$$v_1^2 = v_0^2 - \frac{v_0 \omega L}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\omega^2 L^2}{4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha} = v_0^2 - \frac{\omega^2 L^2}{2},$$

откуда:

$$\omega = \frac{4v_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha)} \approx 4{,}33 \text{ рад/с}.$$

Второе решение:

Поскольку размеры шайб малы, а стержень жёстко прикреплён к шайбе 2 – рассматриваемую систему можно считать твёрдым телом с материальными точками на концах стержня.

Запишем уравнение динамики вращательного движения относительно центра стержня (который также является центром масс рассматриваемой системы):

$$I\varepsilon = M \Rightarrow \frac{2mL^2\varepsilon}{4} = \frac{NL\sin\alpha}{2},$$

где N – сила нормальной реакции стенки.

Пусть Δp_y – импульс силы нормальной реакции стенки. Тогда имеем:

$$\omega = \frac{\Delta p_y \sin\alpha}{mL}.$$

Запишем теорему о движении центра масс системы:

$$2m\vec{a}_C = \vec{N}.$$

Отсюда видно, что проекция скорости центра масс на ось x при соударении остаётся постоянной и равной:

$$v_{Cx} = v_0 \sin\alpha.$$

Пусть v_{Cy} – скорость центра масс в проекции на ось y сразу после удара. Тогда из теоремы о движении центра масс получим:

$$2ma_{Cy} = N \Rightarrow \Delta p_y = 2m(v_{Cy} + v_0\cos\alpha).$$

Поскольку соударение упругое – кинетическая энергия системы сохраняется. Воспользуемся теоремой Кёнига и получим выражение для кинетической энергии системы:

$$E_k = \frac{Mv_C^2}{2} + E_{k\,\text{отн}} \Rightarrow E_k = mv_C^2 + \frac{mL^2\omega^2}{4},$$

откуда:

$$mv_0^2 = mv_{Cy}^2 + mv_{Cx}^2 + \frac{mL^2\omega^2}{4}.$$

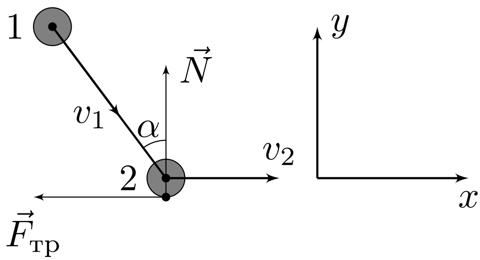
Скомбинируем полученные уравнения:

$$mv_0^2 = m\left(\frac{\omega L}{2\sin\alpha} - v_0\cos\alpha\right)^2 + v_0^2\sin^2\alpha + \frac{m\omega^2L^2}{4} \Rightarrow \frac{v_0\omega L}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\omega^2L^2}{4}\left(1 + 2\operatorname{ctg}^2\alpha\right),$$

откуда:

$$\omega = \frac{4v_0\operatorname{tg}\alpha}{L(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha)} \approx 4{,}33 \text{ рад/с}.$$

3. **Первое решение:**



Сразу после абсолютно неупругого соударения шайбы 2 со стенкой её скорость направлена вдоль стенки. Обозначим её за v_2. Приравнивая проекции скоростей шайб на ось, направленную вдоль стержня, получим:

$$v_2 \sin\alpha = v_1.$$

Компонента скорости шайбы 2, направленная перпендикулярно стержню, равна $v_\perp = v_2 \cos\alpha$, поэтому для угловой скорости вращения стержня имеем:

$$\omega = \frac{v_\perp}{L} = \frac{v_2 \cos\alpha}{L}.$$

Изменения импульса системы в проекции на оси x и y составляют:

$$\Delta p_x = mv_2 + mv_1 \sin\alpha - 2mv_0 \sin\alpha \qquad \Delta p_y = 2mv_0 \cos\alpha - mv_1 \cos\alpha.$$

Подставляя связь v_1 и v_2, получим:

$$\Delta p_x = mv_2(1 + \sin^2\alpha) - 2mv_0 \sin\alpha \qquad \Delta p_y = 2mv_0 \cos\alpha - mv_2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Определим скорость v_2, считая, что шайба 2 всегда проскальзывает по стенке. Критерием правильности рассуждений является неотрицательное значение v_2.

На систему в плоскости рисунка действуют две внешние силы: $N = F_y$ и $F_{\text{тр}} = \mu N = -F_x$. Поскольку силы связаны прямой пропорциональностью, имеем:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta p_y} = \frac{F_x}{F_y} = -\frac{F_{\text{тр}}}{N} = -\mu = \frac{v_2(1 + \sin^2\alpha) - 2v_0 \sin\alpha}{2v_0 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha \cos\alpha},$$

откуда:

$$v_2 = \frac{2v_0(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{1 + \sin^2\alpha - \mu \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{2v_0(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{\cos\alpha(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha - \mu \operatorname{tg}\alpha)}.$$

Величина v_2 является неотрицательной, если $\mu \le \operatorname{tg}\alpha$ и $\mu > 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$. Невозможность постоянного проскальзывания при $\mu > 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ ясна и чисто из физических соображений, однако это можно показать и формально: При таких значениях μ введённая ранее величина Δp_y оказывается отрицательной, что, разумеется, невозможно.

Таким образом, условие постоянного проскальзывания шайбы 2 следующее:

$$\mu \le \operatorname{tg}\alpha.$$

Обратим внимание, что $\mu_1 < \operatorname{tg}\alpha$, а $\mu_2 > \operatorname{tg}\alpha$. Тогда при коэффициенте трения $\mu_1 = 0{,}2$ для угловой скорости стержня сразу после удара получим:

$$\omega_1 = \frac{2v_0(\operatorname{tg}\alpha - \mu_1)}{L(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha - \mu_1 \operatorname{tg}\alpha)} \approx 1{,}52 \text{ рад/с}.$$

При $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$ шайбы 2 в некоторый момент соударения прекращает движение вдоль стенки и далее по ней не проскальзывает. Покажем это.

Пусть F – сила напряжения стержня. Запишем второй закон Ньютона для шайбы 2 в проекции на ось y:

$$ma_{2y} = N - F\cos\alpha \Rightarrow N = F\cos\alpha + ma_{2y} \geq F\cos\alpha.$$

Проскальзывание может возобновиться, если $F\sin\alpha > \mu N$. Но из полученного выражения для N следует:

$$\mu N = \mu(F\cos\alpha + ma_{2y}) \geq \tan\alpha(F\cos\alpha + ma_{2y}) \geq F\sin\alpha,$$

поэтому проскальзывание шайбы 2 не возобновится, и, следовательно, сразу после соударения её скорость равна нулю. Тогда при $\mu_2 = 0{,}6$ в силу полученной связи ω и v_2 находим:

$$\omega_2 = 0 \text{ рад/с}.$$

Второе решение:

Сразу после абсолютно неупругого соударения шайбы 2 со стенкой её скорость направлена вдоль стенки. Обозначим её за v_2.

Запишем выражение для скорости v_2 шайбы 2 и условие её движения без отрыва от стенки:

$$v_{2x} = v_2 = v_{Cx} + \frac{\omega L\cos\alpha}{2} \qquad v_{2y} = 0 = v_{Cy} + \frac{\omega L\sin\alpha}{2}.$$

Изменения импульса системы в проекции на оси x и y составляют:

$$\Delta p_x = 2m(v_{Cx} - v_0\sin\alpha) \qquad \Delta p_y = 2m(v_{Cy} + v_0\cos\alpha).$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения относительно центра масс системы:

$$\frac{mL^2\varepsilon}{2} = \frac{(N\sin\alpha + F_x\cos\alpha)L}{2},$$

где $F_x = -F_{\text{тр}}$ – проекция на ось x силы трения, действующей на шарик 2. Отсюда:

$$\omega = \frac{\Delta p_x\cos\alpha + \Delta p_y\sin\alpha}{mL}.$$

Определим скорость v_2, считая, что шайбы 2 всегда проскальзывает по стенке. Критерием правильности рассуждений является неотрицательное значение v_2.

Из уравнения динамики вращательного движения и уравнений кинематической связи имеем:

$$\omega = \frac{2(v_2 - (\omega L \cos\alpha)/2 - v_0 \sin\alpha)\cos\alpha + 2(v_0\cos\alpha - (\omega L \sin\alpha)/2)\sin\alpha}{L}.$$

После преобразований получим:

$$\omega = \frac{v_2 \cos\alpha}{L}.$$

Если проскальзывание не прекращается, то $F_x = -F_{\text{тр}} = -\mu N$, откуда:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta p_y} = -\mu = \frac{v_{Cx} - v_0 \sin\alpha}{v_{Cy} + v_0\cos\alpha}.$$

Из полученного соотношения и уравнений кинематической связи имеем:

$$v_0 \sin\alpha + \frac{\omega L \cos\alpha}{2} - v_2 = \mu\left(v_0\cos\alpha - \frac{\omega L \sin\alpha}{2}\right).$$

Подставляя полученную ранее связь ω и v_2, находим:

$$v_0 \sin\alpha + \frac{v_2\cos^2\alpha}{2} - v_2 = \mu v_0 \cos\alpha - \frac{\mu v_2 \sin\alpha\cos\alpha}{2},$$

откуда:

$$v_2 = \frac{2v_0(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2 - \cos^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2v_0(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{\cos\alpha(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha - \mu\operatorname{tg}\alpha)}.$$

Величина v_2 является неотрицательной, если $\mu \le \operatorname{tg}\alpha$ и $\mu > 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$. Невозможность постоянного проскальзывания при $\mu > 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ ясна и чисто из физических соображений, однако это можно показать и формально: При таких значениях μ введённая ранее величина Δp_y оказывается отрицательной, что, разумеется, невозможно.

Таким образом, условие постоянного проскальзывания шайбы 2 следующее:

$$\mu \le \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда при $\mu_1 = 0{,}2$ для угловой скорости стержня сразу после удара получим:

$$\omega_1 = \frac{2v_0(\operatorname{tg}\alpha - \mu_1)}{L(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha - \mu_1\operatorname{tg}\alpha)} \approx 1{,}52 \text{ рад/с}.$$

При $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$ шайбы 2 в некоторый момент соударения прекращает движение вдоль стенки и далее по ней не проскальзывает. Покажем это.

Если $v_{2x} = 0$, то с учетом пренебрежимо малого изменения координат (углов) за время удара, выполняется соотношение:

$$a_{Cx} + \frac{\varepsilon L \cos\alpha}{2} = 0.$$

Определим из этого условия силу трения F_x, действующую на шарик 2:

$$\frac{F_x}{2m} + \frac{(N\sin\alpha + F_x\cos\alpha)\cos\alpha}{2m} = 0 \Rightarrow |F_x| = \frac{N\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha} < \frac{N\sin\alpha}{\cos\alpha} \leq \mu N.$$

Это доказывает, что предположение об отсутствии проскальзывания после обнуления проекции v_{2x} скорости шайбы 2 верно.

Тогда при $\mu_2 = 0{,}6$ в силу полученной связи ω и v_2 находим:

$$\omega_2 = 0 \text{ рад/с}.$$