Задача №11-Т1. Щель Кассини

1. Рассмотрим пучок лучей падающих на правое (по рисунку) основание конуса диаметром D. Часть лучей, идущих в пределах круга диаметром d с центром на оси конуса, проходит без препятствий и образует на экране круглое пятно того же диаметра.

Остальные лучи, прошедшие через входное сечение конуса, испытывают не менее одного отражения от боковой поверхности конуса. Поскольку оптическая схема имеет осевую симметрию, то эти, испытавшие отражения, лучи будут образовывать кольца, с центром в точке пересечения экрана осью конуса. Выясним количество и геометрию этих колец (радиусы и ширину колец, а также возможность их перекрытия друг с другом).

Первое решение:

Рассмотрим луч, падающий на самый край входного сечения конуса. До попадания на экран он испытает максимальное количество отражений от боковой поверхности конуса. После каждого отражения от зеркальной поверхности угол между лучом и осью конуса увеличивается на 2α, где $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{D-d}{2h} = \dfrac{3d}{2h}$.

Применим для определения числа отражений известный в оптике метод, когда вместо отражения луча от поверхности и изменения его направления, рассматриваем прямую линию луча, отражая вместо него в границе раздела область пространства. При этом вместо ломаной и равнобокой трапеции, соответствующей осевому сечению конуса, получится луч и система трапеций (см. рис.).

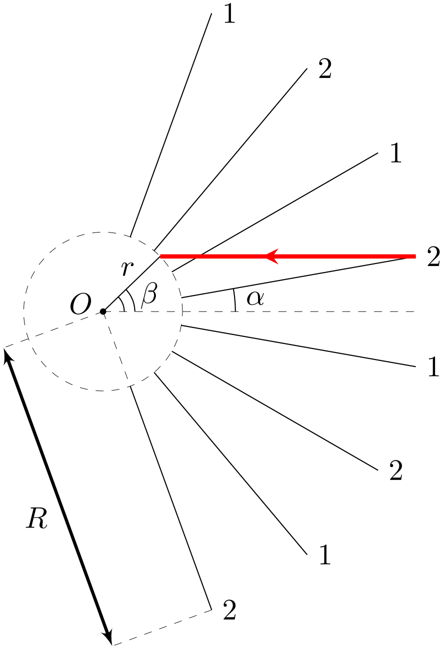
Малые и большие основания трапеций при этом почти соответствуют сторонам многоугольников, вписанных в две концентрические окружности.

Радиус внутренней (r) и внешней (R) окружностей определяются из соотношений: $d = 2r\sin\alpha$ и $D = 2R\sin\alpha$. Тогда отношение радиусов окружностей равно отношению соответственных диаметров конуса: $R = 4r$. Также несложно получить соотношение: $h = (R-r)\cos\alpha = 3r\cos\alpha$.

Пусть угол, который образует выбранный луч с радиусом в точке пересечения внутренней окружности равен β, тогда $\sin\beta = 4\sin\alpha$. Искомое число отражений луча равно целой части отношения:

$$x = \frac{\beta+\alpha}{2\alpha}.$$

Если применить условие $D \ll h$, получим, что $\beta \ll 1$, следовательно, $\beta \approx 4\alpha$ и $x \approx 2{,}5$. Численное значение величины x можно использовать для нахождения числа колец и их ширин. Целая часть соответствует числу полных колец ширины d (вместе с центральным пятном диаметра d). Дробная часть соответствует ширине (в единицах d) последнего неполного наблюдаемого кольца наибольшего радиуса.

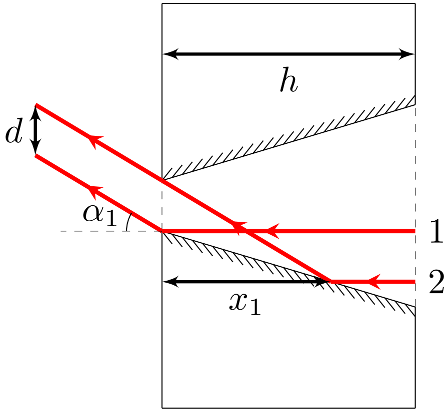


Таким образом, при $x = 2{,}5$, на экране помимо центрального пятна наблюдается еще два кольца. Первое кольцо имеет ширину d (полное) и радиус средней линии $R_1 = 2\alpha L = \dfrac{3dL}{h}$ (см. рис.). Второе кольцо имеет ширину $d/2$, что соответствует в рамках приближения дробной части числа x, и радиус внешней границы $R_2 = 4\alpha L = \dfrac{6dL}{h}$.

Второе решение:

Рассмотрим влияние «конического зеркала» на параллельный его оси пучок световых лучей. Учитывая очевидную симметрию картины относительно вращений вокруг оси конуса, рассмотрим одно его осевое сечение и лучи, падающие только на одну из боковых сторон получившейся в сечении трапеции.

Обозначим угол полураствора конуса α. Из геометрии находим $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{D-d}{2h} = \dfrac{3d}{2h}$. Так как $D \ll h$, то α и все углы того же порядка можно считать малыми. Тогда $\alpha = \dfrac{3d}{2h}$.

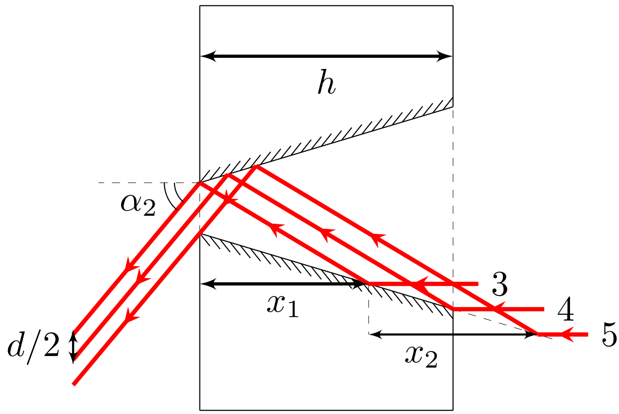


Ясно, что лучи, не испытавшие отражения от поверхности конуса, продолжат идти параллельно его оси и образуют на экране круглое пятно диаметром d.

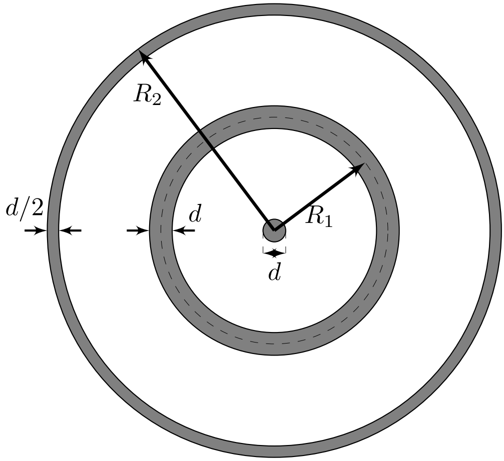
Лучи, испытавшие одно отражение и попавшие после этого в выходное отверстие, будут идти под углом $\alpha_1 = 2\alpha$ к оси. Зона отражения этих лучей (x_1) определяется по точке отражения «крайнего» луча 2 (см. рис.). С учетом малости углов легко найти ширину этой зоны:

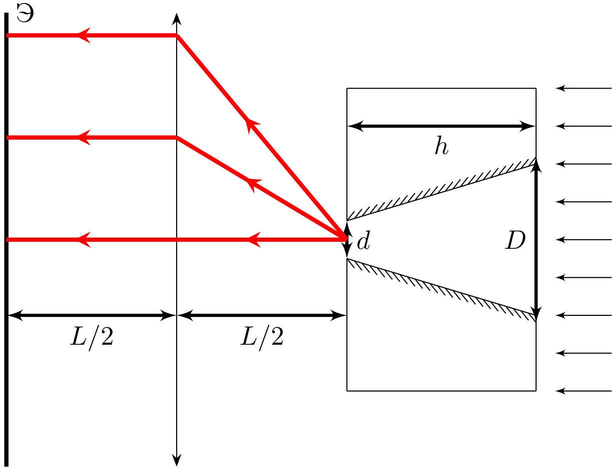
$$x_1 \cdot (\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha) = d \Rightarrow x_1 \approx \frac{d}{\alpha} \approx \frac{2h}{3}.$$

Данная группа лучей образует на экране кольцо ширины d с центром на оси и радиусом средней линии $R_1 = \alpha_1 L = \dfrac{3dL}{h}$.

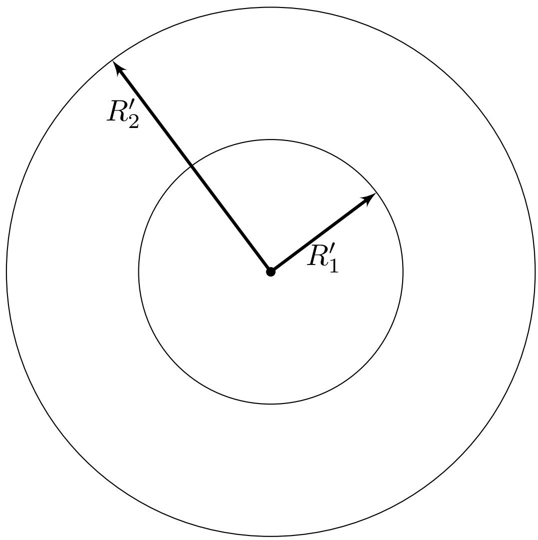


Далее, рассуждая аналогично, мы понимаем, что каждое дополнительное отражение увеличивает угол наклона луча к оси еще на 2α. Рассмотрим лучи, отразившиеся от конической поверхности отверстия дважды. Они выйдут из пластины под углом $\alpha_2 = 4\alpha$ и образуют на экране следующее кольцо. Найдем расстояние x_2 между точками первого отражения пограничных лучей из этой группы. Так как $\alpha \ll 1$, то с хорошей точностью $x_2 = x_1 = 2h/3$. Заметим, что $x_1 + x_2 = 4h/3 > h$. Это означает, что лучи, испытавшие два отражения, при пересекают не всю площадь выходного отверстия. По крайним лучам этой группы (3 и 4) можно определить толщину второго кольца: $d_2 = d/2$ и радиус его внешней границы $R_2 = \alpha_2 = \dfrac{6dL}{h}$.





2. Поместим посредине между пластиной и экраном тонкую линзу. По условию $L = 2F$, значит плоскость экрана является для линзы фокальной, и параллельные пучки лучей сфокусируются. Центральное пятно превратится в «точку» (не в математическом смысле, а в физическом, поскольку дифракционные явления принципиально ограничивают минимальный размер области фокусировки), а кольца – в «окружности». Радиусы «окружностей» (бывших колец) уменьшатся вдвое: $R_1' = \alpha L = \dfrac{3dL}{2h}$ и $R_2' = 2\alpha L = \dfrac{3dL}{h}$.



Задача №11-Т2. Похоже на Сатурн

1. Пусть $\vec{R}$ – радиус–вектор, проведённый из центра шара в точку на его поверхности. Тогда для электрического поля на поверхности шара получим:

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

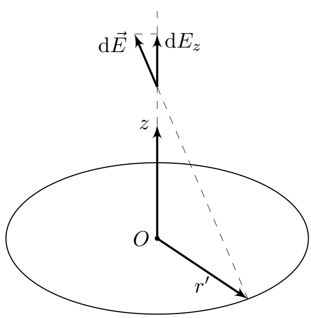
Далее воспользуемся цилиндрическими координатами r, z. Начало координат совпадает с центрами кольца и шара, ось z направлена вдоль оси вращения системы, а r обозначает расстояние от рассматриваемой точки до оси z.

Определим электрическое поле кольца на его оси вращения.

Первый способ:

Рассмотрим окружность радиусом r' с зарядом dq, распределённым равномерно по её периметру. Тогда на оси вращения окружности в точке с координатой z электрическое поле равняется:

$$\mathrm{d}E_z = \frac{z\ \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(r'^2 + z^2)^{3/2}}.$$



Поскольку $z<R \ll r_1$, r_2 – при любых значениях z справедливо приближе-

ние:

$$\mathrm{d}E_z \approx \frac{z\ \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}.$$

Учитывая, что для кольца $\mathrm{d}q = 2\pi r'\ \mathrm{d}r'\ \sigma$ – его электрическое поле на оси z равняется:

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{r'\mathrm{d}r'}{r'^3} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Второй способ:

Электрическое поле кольца на его оси может быть найдено с помощью теоремы о телесном угле. Покажем, что если по плоскому слою равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью σ, то в точке A компонента электрического поля, перпендикулярная слою, равна:

$$E_n = \frac{\sigma\Omega_A}{4\pi\varepsilon_0},$$

где Ω_A – телесный угол, под которым виден плоский слой из точки A.

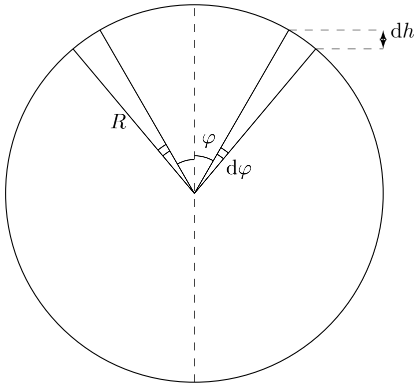
Доказательство: рассмотрим элемент плоского слоя с площадью $\mathrm{d}S$. Пусть $\vec{e}_n$ – единичный вектор нормали к поверхности слоя, направленный к точке A, а $\vec{r}$ – радиус–вектор, проведённый от элемента слоя к точке A. Тогда для нормальной компоненты электрического поля элемента слоя получим:

$$\mathrm{d}\vec{E}_n = \vec{e}_n \cdot \frac{\sigma\vec{r}\ \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{r^3}.$$

Если направления векторов $\vec{r}$ и $\mathrm{d}\vec{S}$ изменить на противоположные, величина $\left(\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right)/r^3$ по определению будет представлять собой элемент телесного угла $\mathrm{d}\Omega_A$, под которым элемент плоского слоя виден из точки A. Таким образом:

$$\mathrm{d}E_n = \frac{\sigma\ \mathrm{d}\Omega_A}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma\Omega_A}{4\pi\varepsilon_0},$$

что и требовалось доказать.



Определим телесный угол, код которым виден диск из точки, расположенной на его оси. Он равен телесному углу, под которым виден из центра сферы её сегмент, ограниченный конусом с углом раствора 2α, вершина которого совпадает с центром сферы:

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{R^2} = \frac{2\pi R\sin\varphi \cdot R\mathrm{d}\varphi}{R^2} =$$

$$= \frac{2\pi R \cdot R\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{R^2} = \frac{2\pi R\ \mathrm{d}h}{R^2} \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi h}{R},$$

где $h = R(1-\cos\alpha)$.

Отсюда:

$$\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha).$$

Тогда для телесного угла, под которым виден диск радиусом r из точки, находящейся на его оси вращения на расстоянии z от центра, получим:

$$\Omega_{\text{д}} = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right).$$

Телесный угол, под которым видно кольцо на его оси вращения в точке с координатой z, может быть получен как разность телесных углов дисков радиусами r_2 и r_1:

$$\Omega_{\text{к}} = 2\pi\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+r_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+r_2^2}}\right) \approx 2\pi z\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Наконец, обратим внимание, что компонента электрического поля кольца, перпендикулярная его плоскости, вблизи оси вращения кольца является практически постоянной. Это связано с тем, что складываемые компоненты электрического поля имеют одинаковое направление, а расстояние до каждого заряженного элемента кольца при малых отклонениях от его оси вращения так же изменяется на малую величину.

Таким образом:

$$E_z(r,z) \approx E_z(0,z) \approx \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

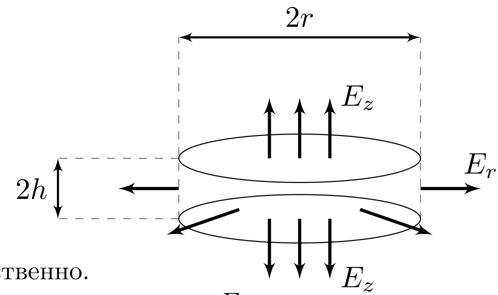
Далее определим компоненту электрического поля E_r кольца, перпендикулярную его оси вращения. Вблизи плоскости кольца величина данной компоненты электрического поля является практически постоянной, поскольку, как и в случае с компонентой E_z, при малых отклонениях от плоскости кольца направления складываемых компонент векторов не изменяются, а расстояния так же изменяются на малую величину.

Таким образом:

$$E_r(r,z) \approx E_r(r,0).$$

Первый способ:

Воспользуемся теоремой Гаусса для цилиндра радиусом r и высотой $2h$, соосного с кольцом:



$$\Phi = \Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}} = 0,$$

где $\Phi_{\text{осн}}$ и $\Phi_{\text{бок}}$ – потоки электрического поля кольца через основания цилиндра и боковую поверхность соответственно.

Поскольку компонента электрического поля кольца E_z практически не зависит от r, а компонента электрического поля кольца E_r практически не зависит от z:

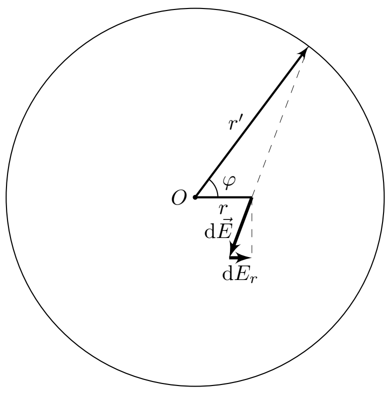
$$\Phi_{\text{осн}} = 2 \cdot \pi r^2 E_z \qquad \Phi_{\text{осн}} = 2\pi r \cdot 2h \cdot E_r \Rightarrow E_r = -\frac{E_z r}{2z}.$$

Подставляя полученное ранее выражение для E_z:

$$E_r = -\frac{\sigma r}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Второй способ:

Рассмотрим окружность радиусом r', по периметру которой равномерно распределён заряд q. В точке окружности, расположенной на расстоянии $r \ll r'$ от его центра, электрическое поле направлено вдоль линии, соединяющей центр кольца с рассматриваемой точкой.



Пусть φ – угол, отсчитываемый между линиями «точка–центр окружности» и «элемент заряда–центр окружности». Тогда для элементарной компоненты электрического поля dE_r получим:

$$\mathrm{d}E_r = -\frac{\mathrm{d}q(r'\cos\varphi - r)}{4\pi\varepsilon_0(r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\varphi)^{3/2}}.$$

Учтём, что $\mathrm{d}q = q\cdot\mathrm{d}\varphi/(2\pi)$ и введём параметр $a = r/r'$:

$$\mathrm{d}E_r = -\frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 r'^2}\frac{(\cos\varphi - a)\ \mathrm{d}\varphi}{(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{3/2}}.$$

Упростим полученное выражение с учётом $a \ll 1$:

$$\frac{\cos\varphi - a}{(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{3/2}} \approx (\cos\varphi - a)(1 + 3a\cos\varphi) \approx \cos\varphi - a + 3a\cos^2\varphi.$$

Здесь мы пренебрегали всеми порядками малости, выше первого.

Получим:

$$E_r = -\frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 r'^2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi - a + 3a\cos^2\varphi)\ \mathrm{d}\varphi = -\frac{qa}{8\pi^2\varepsilon_0 r'^2}\int\limits_0^{2\pi}(3\cos^2\varphi - 1)\ \mathrm{d}\varphi.$$

Здесь мы учли, что интеграл от тригонометрической функции за период равен нулю.

Продолжая интегрирование:

$$\int\limits_0^{2\pi}(3\cos^2\varphi - 1)\ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{3\cos 2\varphi + 1}{2}\ \mathrm{d}\varphi = \pi.$$

Тогда для E_r имеем:

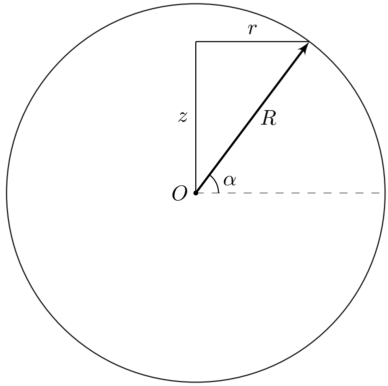
$$E_r = -\frac{qr}{8\pi\varepsilon_0 r'^3}.$$

При переходе к исходному кольцу $E_r \to dE_r$, а $q \to dq = 2\pi r'dr'\sigma$. Тогда для компоненты электрического поля кольца E_r получим:

$$E_r = -\frac{\sigma r}{4\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{r'\mathrm{d}r'}{r'^3} = -\frac{\sigma r}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Введём угол α между плоскостью кольца и радиус–вектором $\vec{R}$. Тогда для r и z получим:

$$r = R\cos\alpha \qquad z = R\sin\alpha.$$



Для компонент электрического поля на поверхности шара получим:

$$E_z = \frac{R\sin\alpha}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi R^3} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right) \quad E_r = \frac{R\cos\alpha}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi R^3} - \frac{\sigma}{4}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right).$$

Величина электрического поля определяется выражением $E = \sqrt{E_z^2 + E_r^2}$ и достигает экстремальных значений при $\alpha = 0,\pi/2$. Поскольку заряды кольца и шара положительные, для них имеем:

$$E_1 = E(0) = \left|\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right| \quad E_2 = E(\pi/2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Поскольку $E_1 < E_2$, окончательно находим:

$$\left|\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right| \le E \le \frac{Q}{4\pi R^2} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

2. Для того, чтобы электрическое поле можно было считать направленным вдоль оси z вращения системы, компонента E_r электрического поля должна обращаться в ноль, чему соответствует единственное значение σ, равное:

$$\sigma = \frac{Qr_1r_2}{R^3(r_2 - r_1)}.$$

Отметим, что при данном значении σ компонента E_z не обращается в ноль в точках, удалённых от плоскости кольца на значительное расстояние. Вблизи плоскости кольца компонента электрического поля E_z в точности стремится к нулю, а полученное нами приближение для компоненты E_r электрического поля становится неприменимым (для полученной σ), поскольку не учитывает более высоких членов разложения, и, соответственно, в точках, находящихся вблизи плоскости кольца, электрическое поле на довольно коротком участке становится направленным вдоль плоскости кольца.

$$\sigma = \frac{Qr_1r_2}{R^3(r_2 - r_1)}.$$

Задача №11-Т3. Кружатся диски

Пусть диск вращается с угловой скоростью ω в направлении против часовой стрелки. У носителей зарядов, находящихся на расстоянии r от оси диска, появляется коллективная скорость ωr, перпендикулярная оси диска, и, соответственно, появляется одинаковая (не зануляющаяся при суммировании по всем носителям) составляющая сила Лоренца, которая вызовет перераспределение носителей по радиусу до стационарного состояния, в котором разность потенциалов в точках, находящихся на расстояниях r и $r + \mathrm{d}r$ от оси диска равна $\mathrm{d}\varphi = \omega B\ r\mathrm{d}r$.

Таким образом, присутствие магнитного поля вызовет появление во вращающемся диске ЭДС индукции, равной:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \omega B \int\limits_0^R r\mathrm{d}r = \frac{\omega B R^2}{2}, \tag{1}$$

по знаку противоположной ЭДС источника.

Запишем второй закон Кирхгофа для контура электрической цепи:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = \mathcal{E} - \frac{\omega B R^2}{2} = L\ddot{q} + \frac{q}{C}, \tag{2}$$

где q – заряд конденсатора.

Далее запишем закон изменения энергии в электрической цепи, учитывая, что магнитное поле не совершает работы:

$$A_{\text{ист}} = \mathcal{E} \cdot \Delta q = \Delta W_C + \Delta W_L + \Delta E_k,$$

где W_C и W_L – энергия конденсатора и катушки индуктивности соответственно, а E_k – кинетическая энергия вращения обода. Приведём выражения для них:

$$W_C = \frac{q^2}{2C} \qquad W_L = \frac{L\dot{q}^2}{2} \qquad E_k = \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

Дифференцируя по времени закон сохранения энергии, получим:

$$\mathcal{E}\dot{q} = \frac{q\dot{q}}{C} + L\dot{q}\ddot{q} + mR^2\omega\dot{\omega}. \tag{3}$$

Умножая уравнение (2) на $\dot{q}$ и вычитая из него уравнение (3), получим следующее соотношение между $\dot{\omega}$ и $\dot{q}$:

$$\frac{BR^2\dot{q}}{2} = mR^2\dot{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{2m}. \tag{4}$$

В последнем переходе мы воспользовались начальными условиями:

$$\omega(0) = 0 \qquad q(0) = 0.$$

Примечание: Связь ω и q может быть получена из уравнения динамики вращательного движения диска относительно точки O. Действительно:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = mR^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O$$

Определим момент силы Ампера, действующей на возникающий в диске электрический ток:

$$\mathrm{d}\vec{M}_O = \mathrm{d}I\left[\vec{r} \times \left[\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{B}\right]\right] = -\mathrm{d}I \cdot r\mathrm{d}r\ \vec{B}$$

где r – расстояние до точки O.

Поскольку через круг любого радиуса с центром в точке O протекает ток силой I – для момента $\vec{M}_O$ получим:

$$\vec{M}_O = I\vec{B}\int\limits_R^0 r\mathrm{d}r = \frac{IR^2\vec{B}}{2} = \frac{R^2\vec{B}}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Таким образом:

$$mR^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{R^2\vec{B}}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{q\vec{B}}{2m}$$

Таким образом, возможны три комбинации двух физических законов, приводящие к решению задачи:

1. Закон электромагнитной индукции и закон сохранения энергии;
2. Уравнение динамики вращательного движения и закон электромагнитной индукции;
3. Уравнение динамики вращательного движения и закон сохранения энергии.

Для определения максимальной угловой скорости заметим, что она достигается в момент, когда сила тока в цепи оказывается равной нулю. Тогда из закона изменения энергии имеем:

$$\mathcal{E}q = \frac{q^2}{2C} + \frac{mR^2\omega_{\max}^2}{2} \Rightarrow \frac{2m\omega_{\max}\mathcal{E}}{B} = \frac{\omega_{\max}^2}{2}\left(\frac{4m^2}{B^2C} + mR^2\right),$$

откуда:

$$\omega_{\max} = \frac{4BC\mathcal{E}}{4m + B^2R^2C}.$$

Комбинируя уравнения (2) и (4), получим:

$$\mathcal{E} = \ddot{\omega} \cdot \frac{2mL}{B} + \omega \cdot \left(\frac{BR^2}{2} + \frac{2m}{BC}\right). \tag{5}$$

Вводя переменную $\omega' = \omega - 2BC\mathcal{E}/(4m + B^2R^2C)$, получим уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\omega}' = -\omega' \left(\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}\right) = -\Omega_0^2\omega' \ \left[\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}}\right] \Rightarrow \omega'(t) = A\cos(\Omega_0 t + \varphi_0).$$

Определим A и φ_0 из начальных условий:

$$\begin{cases} \omega(0) = \dfrac{2BC\mathcal{E}}{4m + B^2R^2C} + A\cos\varphi_0 = 0 \\ \dot{\omega}(0) = -\Omega_0 A\sin\varphi_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_0 = \pi;\ A = \frac{2BC\mathcal{E}}{4m + B^2R^2C}.$$

Окончательно для $\omega(t)$ имеем:

$$\omega(t) = \frac{2BC\mathcal{E}}{4m + B^2R^2C}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}}\ t\right)\right). \tag{6}$$

Угловая скорость впервые достигается значения $\omega_{\max}$, когда $\cos\Omega_0\tau = -1$, т.е при $\omega_0\tau = \pi$. Тогда для τ находим:

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} + \dfrac{B^2R^2}{4mL}}}.$$

Задача №11-Т4. Адиабатическая анизотропия

1. Запишем первое начало термодинамики для вещества под поршнем:

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A = \mathrm{d}U + p\ \mathrm{d}V = \mathrm{d}U + \mathrm{d}(pV) - V\ \mathrm{d}p.$$

Далее используем выражение для внутренней энергии идеального газа и уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$U = \nu C_V T \qquad pV = \nu RT.$$

Поскольку вещество в сосуде целиком остаётся в газообразной фазе:

$$\mathrm{d}(pV) = \nu R\,\mathrm{d}T.$$

Тогда получим:

$$\delta Q = \nu C_V\,\mathrm{d}T + \nu R\,\mathrm{d}T - V\,\mathrm{d}p = \nu C_p\,\mathrm{d}T - V\,\mathrm{d}p,$$

где $C_p = C_V + R = 4R$ – молярная теплоёмкость идеального многоатомного газа при постоянном давлении.

Для теплоёмкости идеального газа, выраженной через параметры (p,T), имеем:

$$C = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} = \nu C_p - V\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \nu C_p - \frac{\nu RT}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \nu\left(C_p - R\cdot\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_T}\right).$$

Тогда молярная теплоёмкость насыщенного пара равна:

$$C_{\text{нас}} = C_p - \alpha R = R(4-\alpha) = -93{,}9\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}.$$

2. При изменении объёма сосуда возможны два принципиально различных физических процесса:

1. Если относительное изменение давления водяного пара под поршнем меньше относительного изменения насыщенного пара при том же относительном изменении температуры, т.е если $\varepsilon_p < \varepsilon_{p(\text{н.п})} = \alpha\varepsilon_T$ – вещество в сосуде целиком остаётся в газообразном состоянии, а пар перестаёт быть насыщенным.
2. Если описанное условие соотношения относительных изменений давлений при одинаковом относительном изменении температуры не выполняется – пар в сосуде будет оставаться насыщенным и при этом частично конденсироваться.

Получим относительное изменение давления пара под поршнем, считая, что он целиком остаётся в газообразном состоянии.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона получим:

$$pV = \nu RT \Rightarrow p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = \nu R\,\mathrm{d}T = \frac{pV\,\mathrm{d}T}{T} \Rightarrow \varepsilon_p + \varepsilon_V = \varepsilon_T.$$

Запишем первое начало термодинамики:

$$\mathrm{d}U = -\delta A \Rightarrow \nu C_V\,\mathrm{d}T = -p\,\mathrm{d}V = -\frac{\nu RT\,\mathrm{d}V}{V} \Rightarrow \varepsilon_T = -\frac{R\varepsilon_V}{C_V}.$$

Обратим внимание, что $\varepsilon_T > 0$, поскольку $\varepsilon_V < 0$.

Далее находим:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_T - \varepsilon_V = \varepsilon_T\left(1 + \frac{C_V}{R}\right) = \frac{C_p\varepsilon_T}{R} = 4\varepsilon_T < \alpha\varepsilon_T.$$

Таким образом, всё вещество под поршнем остаётся газообразным.

Тогда полученное нами выражение для ε_T является применимым и температура увеличивается на величину, равную:

$$\Delta T = T_0 \cdot \frac{\beta}{C_V/R} = \frac{\beta T_0}{3} \approx 5{,}6\ \text{K}.$$

3. Из решения второго пункта следует, что при увеличении объёма без конденсации температура в сосуде должна уменьшиться. Тогда пар в сосуде будет оставаться насыщенным и при этом частично конденсироваться, поскольку иначе давление пара в сосуде станет выше давления насыщенного пара при той же температуре, что невозможно.

Продифференцируем уравнение Менделеева–Клапейрона с учётом изменения газообразного количества вещества в сосуде:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \varepsilon_p + \varepsilon_V = \varepsilon_\nu + \varepsilon_T \Rightarrow \varepsilon_T(\alpha - 1) + \varepsilon_V = \varepsilon_\nu,$$

поскольку в рассматриваемом процессе $\varepsilon_p = \alpha\varepsilon_T$.

Из первого начала термодинамики:

$$\delta Q_{\text{нас}} + L\ \mathrm{d}m = 0,$$

где $Q_{\text{нас}}$ – количество теплоты, полученное неконденсирующимся насыщенным паром, а $\mathrm{d}m = \mu\ \mathrm{d}\nu$ – изменение массы водяного пара.

Поскольку состояние не конденсирующегося водяного пара в координатах (p,T) описывается кривой фазового равновесия – его теплоёмкость равна теплоёмкости $C_{\text{нас}}$, полученной при решении первого пункта, поэтому для количества теплоты $\delta Q_{\text{нас}}$ имеем:

$$\delta Q_{\text{нас}} = C_{\text{нас}}\ \mathrm{d}T.$$

Примечание: Отметим, что формула

$$\delta Q_{\text{нас}} = C_V\ \mathrm{d}T + p\ \mathrm{d}V,$$

где $\mathrm{d}V$ – изменение объёма сосуда, не является правильной, поскольку вследствие фазового перехода величина $\mathrm{d}V$ не равна изменению объёма, занимаемого не конденсирующимся водяным паром.

Возвращаясь к первому началу термодинамики для системы, получим:

$$\nu C_{\text{нас}}\,\mathrm{d}T + \lambda\mu\,\mathrm{d}\nu = 0 \Rightarrow = \varepsilon_\nu = -\frac{C_{\text{нас}} T \varepsilon_T}{\mu\lambda}.$$

Отсюда:

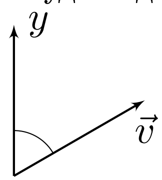
$$\varepsilon_T(\alpha - 1) + \varepsilon_V = -\frac{C_{\text{нас}} T \varepsilon_T}{\mu\lambda}.$$

Окончательно находим:

$$\Delta T = -T_0 \cdot \frac{\beta}{\alpha - 1 + \dfrac{(C_p - \alpha R)T_0}{\mu\lambda}} = -T_0 \cdot \frac{\beta}{\alpha - 1 + \dfrac{(4-\alpha)R}{\mu\lambda}} \approx -1{,}2\ \text{К}.$$

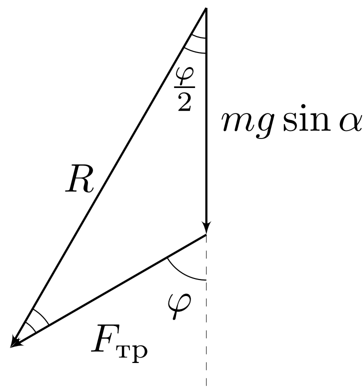
Задача №11-Т5. Туда-сюда

1. Пусть m – масса шайбы. В плоскости доски на шайбу действуют компонента силы тяжести $mg\sin\alpha$, а также сила трения $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$, причём поскольку $\mu = \tan\alpha$:



$$F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha.$$

Изобразим на рисунке компоненту силы тяжести и силу трения, соответствующие углу φ между направлением скорости шайбы и осью y. Из него следует, что равнодействующая R компоненты силы тяжести и силы трения равна:



$$R = 2mg\sin\alpha\cos(\varphi/2).$$

Тогда для ускорений a_0 и a_1 имеем:

$$a_0 = 2g\sin\alpha\cos(\varphi_0/2) \approx 8.49\ \text{м/с}^2, \qquad a_1 = 2g\sin\alpha\cos(\varphi_1/2) \approx 1.76\ \text{м/с}^2.$$

2. **Первое решение:**

Равнодействующая компоненты силы тяжести и силы трения направлена вдоль биссектрисы угла φ между направлением скорости и осью y – тангенциальное ускорение шайбы и проекция её ускорения на ось y равны друг другу, $a_\tau = a_y$, поэтому:

$$v - v_y = v(1 - \cos\varphi) = const = v_0(1 - \cos\varphi_0).$$

Второе решение:

Запишем выражение для тангенциальной и нормальной компонент ускорения:

$$a_\tau = \dot{v} = -g\sin\alpha(1+\cos\varphi), \qquad a_n = v\dot{\varphi} = g\sin\alpha\sin\varphi.$$

Отсюда:

$$\frac{\dot{v}}{v\dot{\varphi}} = -\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{1}{\tan(\varphi/2)}.$$

Разделим переменные и получим:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\tan(\varphi/2)}.$$

Проинтегрируем полученное выражение ($\theta = \varphi/2$):

$$\int\limits_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\tan(\varphi/2)} = -2\int\limits_{\varphi_0/2}^{\varphi/2}\frac{\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = -2\ln\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)}\right).$$

Избавляясь от логарифма, получим:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\sin^2(\varphi_0/2)}{\sin^2(\varphi/2)}, \qquad v(\varphi) = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{1-\cos\varphi}.$$

Поскольку в верхней точке траектории $\varphi = 90^\circ$, для скоростей u и v_1 имеем:

$$u = v_0(1-\cos\varphi_0) \approx 4{,}00 \text{ м/с}, \qquad v_1 = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{1-\cos\varphi_1} \approx 2{,}07 \text{ м/с}.$$

3. **Первое решение:**

Обратим внимание, что из найденного во втором пункте инварианта следует:

$$v - v_y = v_0(1-\cos\varphi_0).$$

Интегрируя по времени, получим

$$S - \Delta y = v_0(1-\cos\varphi_0)t,$$

где Δy и S – изменение координаты y мела и пройденный им путь соответственно. К моменту достижения шайбой основания доски $\Delta y = 0$, поэтому:

$$S = v_0(1-\cos\varphi_0)t.$$

Для определения пути S воспользуемся законом изменения кинетической энергии:

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}} = -mg\sin\alpha\Delta y - mg\sin\alpha S.$$

Поскольку при достижении основания доски $\Delta y = 0$:

$$v_0^2 - v_1^2 = 2g\sin\alpha S = 2g\sin\alpha v_0(1-\cos\varphi_0)t,$$

откуда:

$$t = \frac{v_0}{2g\sin\alpha(1-\cos\varphi_0)}\left(1 - \left(\frac{1-\cos\varphi_0}{1-\cos\varphi_1}\right)^2\right) \approx 1{,}52 \text{ с}$$

Второе решение:

С учётом полученной зависимости $v(\varphi)$, время t можно определить, например, из уравнения для нормальной компоненты ускорения шайбы:

$$v\dot{\varphi} = g\sin\alpha\sin\varphi \Rightarrow \ \mathrm{d}t = \frac{v\ \mathrm{d}\varphi}{g\sin\alpha\sin\varphi} = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{g\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-\cos\varphi)\sin\varphi}.$$

Перейдём к переменной половинного угла:

$$\mathrm{d}t = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{g\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{4\sin^3(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}.$$

Воспользуемся стандартной тригонометрической подстановкой $z = \tan(\varphi/2)$. Тогда получим:

$$\sin(\varphi/2) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad \cos(\varphi/2) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Свяжем $\mathrm{d}\varphi$ и $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\tan(\varphi/2) = \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = (1+\tan^2(\varphi/2))\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}, \qquad \mathrm{d}\varphi = \frac{2\ \mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

Отсюда имеем:

$$\mathrm{d}t = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{g\sin\alpha}\cdot\frac{(1+z^2)^2}{4z^3}\cdot\frac{2\ \mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

Вводя переменные $z_0 = \tan(\varphi_0/2)$ и $z_1 = \tan(\varphi_1/2)$, для времени t получим:

$$t = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{2g\sin\alpha}\int\limits_{z_0}^{z_1}\frac{1+z^2}{z^3}\,\mathrm{d}z = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{2g\sin\alpha}\left(\int\limits_{z_0}^{z_1}\frac{\mathrm{d}z}{z^3}+\int\limits_{z_0}^{z_1}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right).$$

Интегрируя, находим:

$$t = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{2g\sin\alpha}\left(\frac{1}{2z_0^2}-\frac{1}{2z_1^2}+\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right).$$

Возвращаясь к исходным переменным, для времени t находим:

$$t = \frac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{2g\sin\alpha}\left(\frac{1}{1-\cos\varphi_0}-\frac{1}{1-\cos\varphi_1}+\ln\left(\frac{\tan(\varphi_1/2)}{\tan(\varphi_1/2)}\right)\right)\approx 1{,}52\ \text{с.}$$

Примечание 1: Вообще говоря, задача является переопределённой, поскольку значение φ_1 однозначно определяется значением φ_0, однако в такой формулировке задача становится слишком сложной. Участникам олимпиады было достаточно получить лишь одно уравнение, связывающее φ_1 и t. Без заданного значения φ_1 решение третьего пункта задачи требует комбинации первого и второго изложенных решений. Численное значение $\varphi_1 = 159.3^\circ$ можно найти, приравняв два выражения для t и численно решив полученное уравнение:

$$\frac{1}{(1-\cos\varphi_0)^2}-\frac{1}{(1-\cos\varphi_1)^2}=\frac{1}{1-\cos\varphi_0}-\frac{1}{1-\cos\varphi_1}+\ln\left(\frac{\tan(\varphi_1/2)}{\tan(\varphi_0/2)}\right).$$

Примечание 2: Из комбинации двух решений также получаются явные зависимости перемещения Δy и пути S от угла φ:

$$\Delta y(\varphi) = \frac{v_0^2(1-\cos\varphi_0)^2}{4g\sin^2\alpha}\left(\frac{\cos\varphi_0}{(1-\cos\varphi_0)^2}-\frac{\cos\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}-\ln\left(\frac{\tan(\varphi/2)}{\tan(\varphi_0/2)}\right)\right),$$

$$S(\varphi) = \frac{v_0^2(1-\cos\varphi_0)^2}{4g\sin^2\alpha}\left(\frac{2-\cos\varphi_0}{(1-\cos\varphi_0)^2}-\frac{2-\cos\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}+\ln\left(\frac{\tan(\varphi/2)}{\tan(\varphi_0/2)}\right)\right).$$

Помимо этого, мы можем определить зависимость перемещения вдоль оси x, направленной вдоль основания наклонной плоскости, от угла φ:

$$\mathrm{d}x = v\sin\varphi\mathrm{d}t = v\sin\varphi\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\dot\varphi} = \frac{v^2\ \mathrm{d}\varphi}{g\sin\alpha} = \frac{v_0^2(1-\cos\varphi_0)^2}{g\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}.$$

Вновь переходя к переменной $z = \tan(\varphi/2)$, получим:

$$\Delta x(z) = \frac{v_0^2(1-\cos\varphi_0)^2}{2g\sin\alpha}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{(1+z^2)^2}{z^4}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \frac{v_0^2(1-\cos\varphi_0)^2}{2g\sin\alpha}\left(\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz}{z^4}+\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz}{z^2}\right).$$

Интегрируя, находим:

$$\Delta x(z) = \frac{v_0^2(1-\cos\varphi_0)^2}{2g\sin\alpha}\left(\frac{1}{3z_0^3}-\frac{1}{3z^3}+\frac{1}{z_0}-\frac{1}{z}\right).$$

Возвращаясь к переменной φ:

$$\Delta x(\varphi) = \frac{v_0^2(1-\cos\varphi_0)^2}{2g\sin\alpha}\left(\frac{1}{3\tan^3(\varphi_0/2)}-\frac{1}{3\tan^3(\varphi/2)}+\frac{1}{\tan(\varphi_0/2)}-\frac{1}{\tan(\varphi/2)}\right).$$

Таким образом, траектория шайбы может быть получена аналитически в параметрической форме, поскольку $\Delta y(\varphi)$ и $\Delta x(\varphi)$ является известными аналитическими функциями.

Траектория для заданных значений v_0, φ_0, α и g представлена на рисунке ниже.