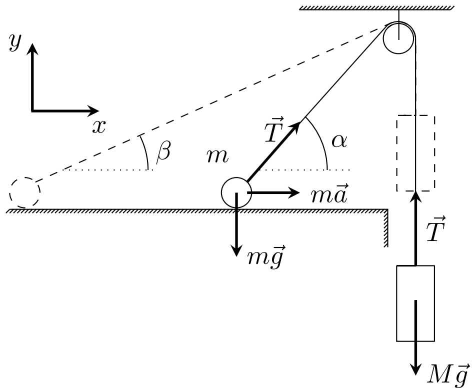
Возможные решения

Задача №9-Т1. Отрыв



1. Введём систему координат xy так, как показано на рисунке. Пусть $\vec{a}$ – ускорение шарика в момент его отрыва от поверхности. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y, принимая во внимание, что в момент отрыва $N = 0$

$$ma_y = mg - T\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

Запишем второй закон Ньютона для груза M в проекции на ось y, принимая во внимание, что груз не ускоряется:

$$Ma_M = Mg - T = 0. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) силу натяжения T, находим отношение масс:

$$\frac{m}{M} = \sin\alpha.$$

2. Пусть v и u – скорости шарика и груза соответственно в рассматриваемый момент, а h – высота блока над поверхностью.

Поскольку нить нерастяжима, проекция скорости шарика v на ось z равна u:

$$v = \frac{u}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

Поскольку трения в системе нет, выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = -Mg\Delta l, \qquad (4)$$

где $\Delta l = h(1/\sin\alpha - 1/\sin\beta)$ – изменение длины наклонного участка нити. Подставляя отношение m/M и соотношение (3) в уравнение (4), получим:

$$\frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{mgh}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\sin\beta} - \frac{1}{\sin\alpha}\right),$$

откуда:

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{v^2(\sin\alpha + \cos^2\alpha)}{2gh}. \qquad (5)$$

Таким образом, задача сводится к определению безразмерного параметра gh/v^2, для нахождений которого проанализируем динамику шарика.

Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на горизонтальную ось x:

$$ma_x = ma = T\cos\alpha \Rightarrow a = \frac{T\cos\alpha}{m} = \frac{g\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{6}$$

Введём ось z, направленную вдоль наклонного участка нити от шарика к блоку (т.е образующую угол α с горизонтом). Проекция ускорения шарика на ось равняется

$$a_z = a\cos\alpha = \frac{g\cos^2\alpha}{\sin\alpha}. \tag{7}$$

Перейдём в систему отсчёта точки A наклонного участка нити, в которой он касается блока. Ускорение шарика $\vec{a}_{\text{отн}}$ в данной системе отсчёта равняется:

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a} - \vec{a}_A.$$

Поскольку ускорение груза равняется нулю – тангенциальное ускорение точки A также равняется нулю, откуда следует, что полное ускорение точки A направлено перпендикулярно наклонному участку нити. Тогда в рассматриваемой системе отсчёта:

$$a_{\text{отн}z} = a_z.$$

В системе отсчёта точки A шарик движется по окружности радиусом $l = h/\sin\alpha$, равным длине наклонного участка нити, со скоростью $v_\perp = v\sin\alpha$, равной проекции скорости шарика на ось, перпендикулярную оси z. Поэтому из выражения для центростремительного ускорения получим:

$$a_{\text{отн}z} = \frac{v_\perp^2}{l} = \frac{v^2\sin^3\alpha}{h}. \tag{8}$$

Приравнивая (7) и (8), находим:

$$\frac{gh}{v^2} = \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (5), получим:

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha + \cos^2\alpha)}{2\sin^4\alpha}, \tag{10}$$

откуда находим угол β:

$$\sin\beta = \frac{2\sin^4\alpha}{\sin\alpha + \sin^3\alpha + \cos^4\alpha}.$$

Задача №9-Т2. Аквариум на пружинах

1. **Метод 1:**

Воспользуемся методом виртуальных перемещений для определения сил.

Для этого определим изменение потенциальной энергии равное работе силы тяжести. Представим, что жидкость переходит из верхнего слоя в образовавшееся пространство, тогда $A_g = -\Delta\Pi \leq -A_F$. Масса перешедшей жидкости $m = \rho a^2 \delta x$.

Для равнодействующей сил давления получаем:

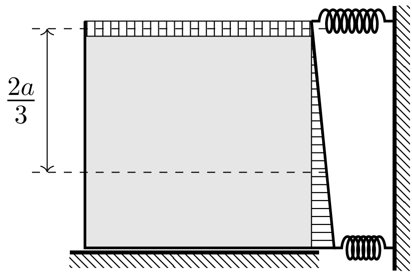
$$(2k\Delta x + k\Delta x)\delta x \geq (\rho a^2 \delta x) g \frac{a}{2} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{6}.$$

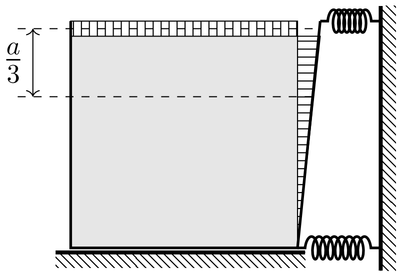
Для моментов сил давления относительно верхнего ребра получаем, что центр тяжести слоя жидкости опускается на $\frac{2a}{3}$:

$$k\Delta x \delta x \geq \frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{2a}{3} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{3}.$$

Для моментов сил давления относительно нижнего ребра получаем, что центр тяжести слоя жидкости опускается на $\frac{a}{3}$:

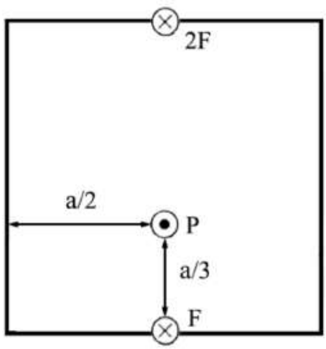
$$2k\Delta x \delta x \geq \frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{a}{3} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{12}.$$





Метод 2:

В заполненном аквариуме на боковую стенку действует сила давления воды $F_P = \frac{1}{2}\rho g a^3$. Для решения необходимо определить точку приложения этой силы. Поскольку по горизонтали давление воды на одном и том же уровне одинаково, очевидно, что эта точка будет находиться на срединной вертикали.



По вертикали давление распределяется линейно от нуля наверху до $\rho g a$ внизу.

Известно, что центр тяжести треугольника расположен в точке пересечения его медиан.

Используя аналогию распределения давления по вертикали в нашем случае с распределением по высоте массы полосок одинаковой ширины, на которые параллельно основанию мысленно разрезан равнобедренный треугольник, можно утверждать, что точка приложения силы находится на расстоянии $a/3$ от дна сосуда.

Метод 3:

Строгий математический расчёт силы и моментов сил можно опровести с помощью интегрирования.

Определим давление как функцию y - глубины от поверхности жидкости: $p(y) = \rho g y$.

Суммарная сила давления воды:

$$F_P = \int_0^a p(y) a dy = \frac{\rho g a^3}{2}.$$

Момент силы относительно верхней кромки:

$$M_\text{в} = \int_0^a y p(y) a dy = \frac{\rho g a^4}{3}.$$

Момент силы относительно нижней кромки:

$$M_\text{н} = \int_0^a (a-y) p(y) a dy = \frac{\rho g a^4}{6}.$$

Условия для отсутствия протечек можно записать в виде неравенств:

$3k\Delta x \geqslant \frac{\rho g a^3}{2}$ (условие на направление результирующей силы)

$k\Delta x \cdot a \geqslant \frac{\rho g a^4}{3}$ (отсутствие поворота вокруг верхнего ребра)

$2k\Delta x \cdot a \geqslant \frac{\rho g a^4}{6}$ (отсутствие поворота вокруг нижнего ребра)

Очевидно, неравенство $k\Delta x \geqslant \frac{\rho g a^3}{3}$ наиболее жесткое.

Откуда $\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{3k}$

2. Отметим, что, поскольку пружины сжимаются одинаково, суммарная сила, с которой они будут давить на стенку аквариума будет в 2 раза больше силы давления воды.

Если пружины в условии поменять местами, последние 2 условия примут вид:

$3k\Delta x \geqslant \frac{\rho g a^3}{2}$ (условие на направление результирующей силы)

$2k\Delta x \cdot a \geqslant \frac{1}{3}\rho g a^3$ (отсутствие поворота вокруг верхнего ребра)

$k\Delta x \cdot a \geqslant \frac{1}{6}\rho g a^3$ (отсутствие поворота вокруг нижнего ребра)

Откуда $\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{6k}$. При этом суммарная сила, с которой пружины будут давить на стенку аквариума в точности совпадет с силой давления.

Задача №9-Т3. Холодильник

1. Пусть N – мощность тепловых потерь. Благодаря ему за малое время $\Delta\tau$ кристаллизуется Δm льда:

$$N\Delta\tau = \Delta m\lambda.$$

В жидком состоянии эта масса занимала объём $\Delta V_{\text{в}}$, а в твёрдом $\Delta V_{\text{л}}$:

$$\Delta m = \rho_{\text{в}}\Delta V_{\text{в}} = \rho_{\text{л}}\Delta V_{\text{л}}.$$

Следовательно, изменение объёма содержимого благодаря кристаллизации Δm льда $\Delta V = \Delta V_{\text{л}} - \Delta V_{\text{в}} = \dfrac{\Delta m}{\rho_{\text{л}}} - \dfrac{\Delta m}{\rho_{\text{в}}} = \Delta m\dfrac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} > 0$. То есть поршень поднялся вверх. Мощность тепловых потерь через боковую поверхность цилиндра пропорциональна площади этой поверхности и разности температур воды и окружающей среды:

$$N = \alpha \cdot h \cdot 2\pi R(t_0 - t).$$

Скорость подъёма поршня

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta\tau} = \frac{\Delta V}{\pi R^2\Delta\tau} = \frac{\Delta m(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\Delta\tau\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}\pi R^2} = \frac{N(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}\pi R^2} = \frac{2\alpha(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}R} \cdot h(t_0 - t).$$

Так как скорость постоянна, используем выражение для неё в начальный момент времени $v = C \cdot h(t_0 - t) = C \cdot h_1(t_0 - t_1)$. Следовательно:

$$v = \frac{2\alpha(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}R} \cdot h_1(t_0 - t_1).$$

2. Равномерное движение поршня может продолжаться вплоть до кристаллизации всей воды. Максимальное изменение объёма системы

$$\Delta V_0 = \Delta m_0\frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} = \pi R^2 h_1\frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}}.$$

Искомая продолжительность процесса

$$\tau_{\max} = \frac{\Delta V_0}{\pi R^2 v} = \frac{\lambda\rho_{\text{в}}R}{2\alpha(t_0 - t_1)}.$$

3. Из условий $h(t_0-t)=h_1(t_0-t_1)$ и $h(\tau)=h_1+v\tau$ можно получить искомую зависимость

$$t=t_0-(t_0-t_1)\frac{h_1}{h_1+v\tau}.$$

4. Подставим выражение для $\tau_{\max}$ в закон изменения температуры и найдём её значение в конечный момент времени:

$$t_{\text{к}}=t_0-(t_0-t_1)\frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

Задача №9-Т4. Постоянный ток

Первое решение:

Заметим, что схема переходит сама в себя при повороте на 120° вокруг центрального узла. У всех источников постоянного тока один узел общий, а вторые узлы подключены к эквипотенциальным точкам. Значит через источники протекают одинаковые токи, при этом равные I_0, поскольку $R \ll r$.

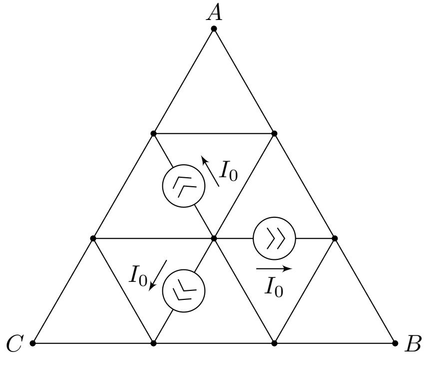


Рисунок 1

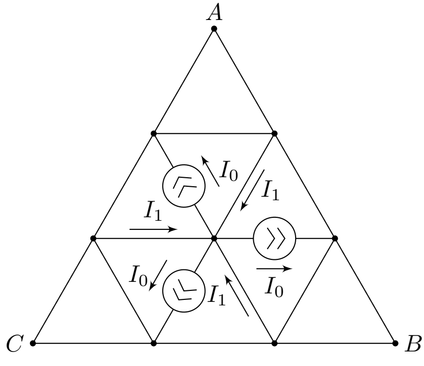


Рисунок 2

Также из симметрии следует, что должны быть равны и токи I_1, втекающие в центральный узел.

Алгебраическая сумма токов для центрального узла равна 0, значит $I_1 = I_0$.

Расставим токи, текущие через элементы цепи, находящиеся в вершине A, в силу симметрии такие же токи протекают через элементы, находящиеся в вершинах B и C.

Пусть через каждый из оставшихся элементов цепи протекает некоторый ток I_2. Так как схема симметрична, потенциалы узлов A и C равны, тогда разность потенциалов $\varphi_C-\varphi_A=0$. Или

$$IR–I_2R+IR=0 \Rightarrow I_2=2I.$$

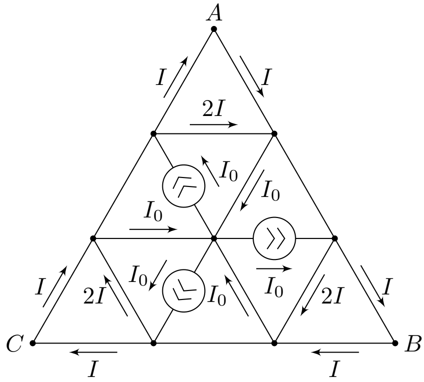


Рисунок 3

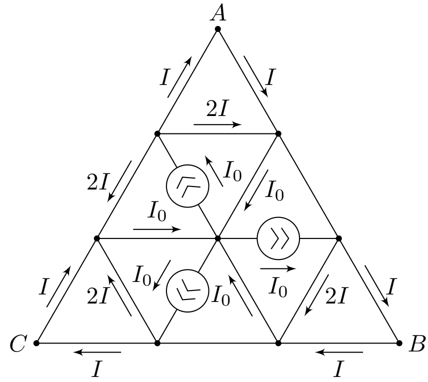


Рисунок 4

Тогда

$$I_0 = I + 2I + 2I = 5I \Rightarrow I_{\min} = I = \frac{I_0}{5}.$$

Второе решение:

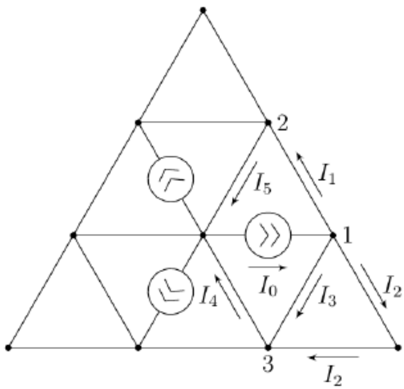


Рисунок 5

Расставим токи по перемычкам цепи I_1,I_2,I_3,I_4,I_5. Потенциал в центральной точке цепи примем равным нулю. Запишем разность потенциалов между узлами 3 и 1:

$$\Delta\varphi_{13} = RI_3 = RI_2 + RI_2 = 2RI_2 \Rightarrow I_3 = 2I_2.$$

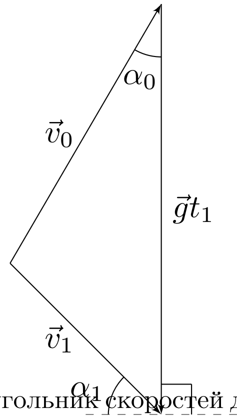
В силу симметрии цепи $\varphi_2 = \varphi_3$ (при повороте на 120° цепь переходит сама в себя) поэтому

$$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{13} \Rightarrow RI_1 = RI_3 \Rightarrow I_1 = I_3.$$

Запишем закон сохранения заряда для узла 1:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = 2I_3 + I_2 = 5I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I_0}{5}.$$

Задача №9-Т5. Угловая высота камня



1. Поскольку вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ направлен перпендикулярно лучу зрения – он образует угол α_0 с вертикалью.

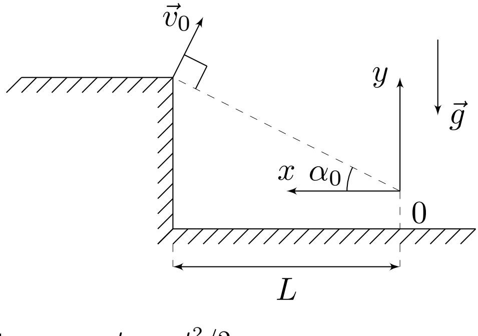
Траектория камня представляет собой участок параболы ветвями вниз,поэтому максимальное значение $\alpha_1 = 38^\circ$ реализуется, если Леопольд расположен вне искомой параболы, и в момент времени t_1, когда угол между лучом зрения и горизонтом достигает максимального значения, луч зрения направлен по касательной к траектории камня. Это означает, что в данный момент скорость камня $\vec{v}_1$ направлена прямо на Леопольда и образует угол α_1 с горизонтом.

Для определения времени t_1 построим векторный треугольник скоростей для данного момента времени. Из теоремы синусов находим:

$$\frac{gt_1}{\sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)} = \frac{v_0}{\sin(\pi/2 - \alpha_1)},$$

откуда:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)}{g \sin(\pi/2 - \alpha_1)} \approx 1{,}24 \text{ с}.$$



2. Введём систему координат xy с началом в месте расположения глаз Леопольда так, как показано на рисунке. Тогда зависимости координат $x(t)$, $y(t)$ следующие:

$$x(t) = L - v_0 \sin\alpha_0 t,$$

$$y(t) = L \operatorname{tg}\alpha_0 + v_0 \cos\alpha_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда для тангенса угла α_1 в момент времени t_1 получим:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y(t_1)}{x(t_1)} = \frac{L \tan\alpha_0 + v_0 \cos\alpha_0 t_1 - gt_1^2/2}{L - v_0 \sin\alpha_0 t_1},$$

откуда:

$$L = \frac{v_0 t_1 (\cos\alpha_0 + \operatorname{tg}\alpha_1 \sin\alpha_0) - gt_1^2/2}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_0} \approx 24{,}3 \text{ м}.$$