Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике для 7 класса.

2021/22 учебный год.

Максимальное количество баллов — 8.

Критерии оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл за каждое задание.

Содержание

7 класс, задача 1

Задача 1.1. Таблица 4×4 разбита на четыре квадрата 2×2.

Вика вписала в клетки таблицы 4 единицы, 4 двойки, 4 тройки и 4 четвёрки так, что в каждом столбце, в каждой строке и в каждом квадрате 2×2 все числа разные.

Хулиган Андрей стёр часть чисел. Помогите Вике восстановить, в каких клетках стояли четвёрки.

	1	2	3	4
A				
B			3	
C	2			1
D	1			

Постройте соответствие.

- В строчке A четвёрка стоит
- В строчке B четвёрка стоит
- В строчке C четвёрка стоит
- В строчке D четвёрка стоит

- в столбце 1.
- в столбце 2.
- в столбце 3.
- в столбце 4.

Ответ: $A - 4, B - 1, C - 3, D - 2$.

Решение.

В четвёртом столбце уже стоит число 1, поэтому в верхнем правом квадрате 2×2 число 1 будет стоять в клетке $A3$. По аналогичным соображениям в клетке $D4$ будет стоять число 3.

	1	2	3	4
A			1	
B			3	
C	2			1
D	1			3

В столбцах с номерами 1, 3, 4 и строках A, C, D стоят три числа 1. Поэтому и в клетке $B2$ стоит число 1.

	1	2	3	4
A			1	
B		1	3	
C	2			1
D	1			3

В клетке $B1$ не может стоять число 2, поэтому оно стоит в клетке $B4$. В клетке $B1$ стоит число 4, так как в этой строке не хватает только его.

	1	2	3	4
A			1	
B	4	1	3	2
C	2			1
D	1			3

В четвёртом столбце число 4 может стоять только в клетке $A4$. В нижнем правом квадрате 2×2 не хватает числа 2: в строке C оно стоять не может, поэтому оно стоит в клетке $D3$.

	1	2	3	4
A			1	4
B	4	1	3	2
C	2			1
D	1		2	3

В третьем столбце число 4 может стоять только в клетке $C3$. Рассмотрев строки C и D, получаем, что в клетке $C2$ стоит число 3, а в клетке $D2$ — число 4.

	1	2	3	4
A			1	4
B	4	1	3	2
C	2	3	4	1
D	1	4	2	3

Рассмотрев первые два столбца, понимаем, что в клетке $A1$ стоит число 3, а в клетке $A2$ — число 2.

	1	2	3	4
A	3	2	1	4
B	4	1	3	2
C	2	3	4	1
D	1	4	2	3

□

Задача 1.2. Таблица 4×4 разбита на четыре квадрата 2×2.

Вика вписала в клетки таблицы 4 единицы, 4 двойки, 4 тройки и 4 четвёрки так, что в каждом столбце, в каждой строке и в каждом квадрате 2×2 все числа разные.

Хулиган Андрей стёр часть чисел. Помогите Вике восстановить, в каких клетках стояли четвёрки.

	1	2	3	4
A	1	2		
B				
C			3	
D		1		

Постройте соответствие.

- В строчке A четвёрка стоит
- В строчке B четвёрка стоит
- В строчке C четвёрка стоит
- В строчке D четвёрка стоит

- в столбце 1.
- в столбце 2.
- в столбце 3.
- в столбце 4.

Ответ: $A - 3, B - 1, C - 2, D - 4$.

Задача 1.3. Таблица 4×4 разбита на четыре квадрата 2×2.

Вика вписала в клетки таблицы 4 единицы, 4 двойки, 4 тройки и 4 четвёрки так, что в каждом столбце, в каждой строке и в каждом квадрате 2×2 все числа разные.

Хулиган Андрей стёр часть чисел. Помогите Вике восстановить, в каких клетках стояли четвёрки.

	1	2	3	4
A				**1**
B	**1**			**2**
C		**3**		
D				

Постройте соответствие.

- В строчке A четвёрка стоит
- В строчке B четвёрка стоит
- В строчке C четвёрка стоит
- В строчке D четвёрка стоит

- в столбце 1.
- в столбце 2.
- в столбце 3.
- в столбце 4.

Ответ: $A - 3, B - 2, C - 4, D - 1$.

Задача 1.4. Таблица 4×4 разбита на четыре квадрата 2×2.

Вика вписала в клетки таблицы 4 единицы, 4 двойки, 4 тройки и 4 четвёрки так, что в каждом столбце, в каждой строке и в каждом квадрате 2×2 все числа разные.

Хулиган Андрей стёр часть чисел. Помогите Вике восстановить, в каких клетках стояли четвёрки.

	1	2	3	4
A			**1**	
B		**3**		
C				
D			**2**	**1**

Постройте соответствие.

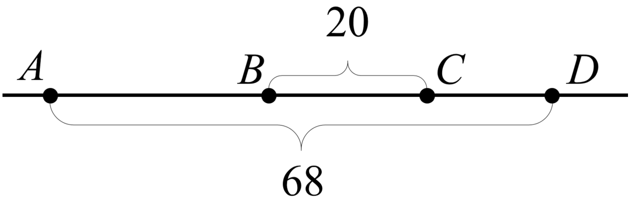
- В строчке A четвёрка стоит
- В строчке B четвёрка стоит
- В строчке C четвёрка стоит
- В строчке D четвёрка стоит

- в столбце 1.
- в столбце 2.
- в столбце 3.
- в столбце 4.

Ответ: $A - 1, B - 3, C - 4, D - 2$.

7 класс, задача 2

Задача 2.1. На прямой отмечены точки A, B, C, D, именно в таком порядке. Точка M — середина отрезка AC, точка N — середина отрезка BD. Найдите длину отрезка MN, если известно, что $AD = 68$ и $BC = 20$.



Ответ: 24.

Решение. Пусть $AC = x$, тогда $AM = \frac{x}{2}$. Теперь вычислим длину ND:

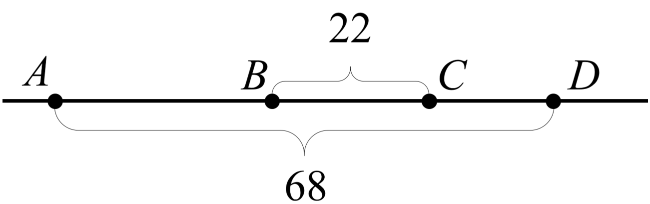
$$ND = \frac{BD}{2} = \frac{20 + CD}{2} = \frac{20 + (68 - x)}{2} = 44 - \frac{x}{2}.$$

Теперь нетрудно вычислить MN:

$$MN = AD - AM - ND = 68 - \frac{x}{2} - \left(44 - \frac{x}{2}\right) = 24.$$

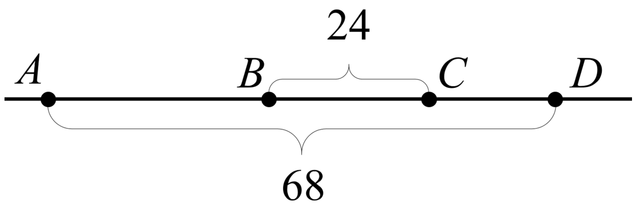
□

Задача 2.2. На прямой отмечены точки A, B, C, D, именно в таком порядке. Точка M — середина отрезка AC, точка N — середина отрезка BD. Найдите длину отрезка MN, если известно, что $AD = 68$ и $BC = 22$.



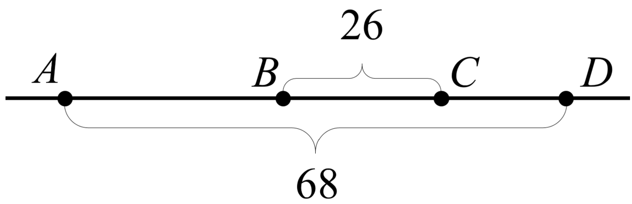
Ответ: 23.

Задача 2.3. На прямой отмечены точки A, B, C, D, именно в таком порядке. Точка M — середина отрезка AC, точка N — середина отрезка BD. Найдите длину отрезка MN, если известно, что $AD = 68$ и $BC = 24$.



Ответ: 22.

Задача 2.4. На прямой отмечены точки A, B, C, D, именно в таком порядке. Точка M — середина отрезка AC, точка N — середина отрезка BD. Найдите длину отрезка MN, если известно, что $AD = 68$ и $BC = 26$.



Ответ: 21.

7 класс, задача 3

Задача 3.1. Паша знает скорость своей моторной лодки. Он посчитал, что ему потребуется 20 минут, чтобы проплыть по реке от причала до моста и обратно. Но при вычислениях он забыл, что у реки есть течение. Сколько минут на самом деле потребуется Паше на задуманный маршрут, если известно, что скорость течения ровно в 3 раза меньше скорости моторной лодки? (Скорости моторной лодки и течения постоянны.)

Ответ: 22,5.

Решение. Пусть x — скорость течения, тогда $3x$ — скорость лодки. По расчётам Паши, плывя со скоростью $3x$, он бы потратил на дорогу в одну сторону 10 минут.

На преодоление этого же расстояния по течению, плывя со скоростью $4x$ (что в реальности в $\frac{4}{3}$ раз больше скорости лодки), он потратит $\dfrac{3}{4} \cdot 10 = 7{,}5$ минут.

А на преодоление этого же расстояния против течения, плывя со скоростью $2x$ (что в реальности в $\frac{3}{2}$ раз меньше скорости лодки), он потратит $\dfrac{3}{2} \cdot 10 = 15$ минут.

Следовательно, весь маршрут займёт у Паши $7{,}5 + 15 = 22{,}5$ минуты. □

Задача 3.2. Паша знает скорость своей моторной лодки. Он посчитал, что ему потребуется 28 минут, чтобы проплыть по реке от причала до моста и обратно. Но при вычислениях он забыл, что у реки есть течение. Сколько минут на самом деле потребуется Паше на задуманный маршрут, если известно, что скорость течения ровно в 3 раза меньше скорости моторной лодки? (Скорости моторной лодки и течения постоянны.)

Ответ: 31,5.

Задача 3.3. Паша знает скорость своей моторной лодки. Он посчитал, что ему потребуется 36 минут, чтобы проплыть по реке от причала до моста и обратно. Но при вычислениях он забыл, что у реки есть течение. Сколько минут на самом деле потребуется Паше на задуманный маршрут, если известно, что скорость течения ровно в 3 раза меньше скорости моторной лодки? (Скорости моторной лодки и течения постоянны.)

Ответ: 40,5.

Задача 3.4. Паша знает скорость своей моторной лодки. Он посчитал, что ему потребуется 44 минуты, чтобы проплыть по реке от причала до моста и обратно. Но при вычислениях он забыл, что у реки есть течение. Сколько минут на самом деле потребуется Паше на задуманный маршрут, если известно, что скорость течения ровно в 3 раза меньше скорости моторной лодки? (Скорости моторной лодки и течения постоянны.)

Ответ: 49,5.

7 класс, задача 4

Задача 4.1. Вдоль дороги, соединяющей дома Маши и Саши, растут деревья: 17 яблонь и 18 тополей. Когда Маша шла в гости к Саше, она фотографировала все деревья. Сразу после десятой яблони память на телефоне Маши закончилась, и она не смогла сфотографировать оставшиеся 13 деревьев. На следующий день, когда Саша шёл в гости к Маше, начиная с восьмой яблони с каждого дерева он срывал по одному листу. Сколько листов сорвал Саша?

Ответ: 22.

Решение. Заметим, что десятая яблоня, считая от дома Маши, — это восьмая яблоня, считая от дома Саши. Следовательно, Саша не сорвёт по листу ровно с 13 деревьев. Получаем, что всего он сорвёт $17 + 18 - 13 = 22$ листа. □

Задача 4.2. Вдоль дороги, соединяющей дома Маши и Саши, растут деревья: 17 яблонь и 19 тополей. Когда Маша шла в гости к Саше, она фотографировала все деревья. Сразу после десятой яблони память на телефоне Маши закончилась, и она не смогла сфотографировать оставшиеся 13 деревьев. На следующий день, когда Саша шёл в гости к Маше, начиная с восьмой яблони с каждого дерева он срывал по одному листу. Сколько листов сорвал Саша?

Ответ: 23.

Задача 4.3. Вдоль дороги, соединяющей дома Маши и Саши, растут деревья: 17 яблонь и 15 тополей. Когда Маша шла в гости к Саше, она фотографировала все деревья. Сразу после десятой яблони память на телефоне Маши закончилась, и она не смогла сфотографировать оставшиеся 13 деревьев. На следующий день, когда Саша шёл в гости к Маше, начиная с восьмой яблони с каждого дерева он срывал по одному листу. Сколько листов сорвал Саша?

Ответ: 19.

Задача 4.4. Вдоль дороги, соединяющей дома Маши и Саши, растут деревья: 17 яблонь и 20 тополей. Когда Маша шла в гости к Саше, она фотографировала все деревья. Сразу после десятой яблони память на телефоне Маши закончилась, и она не смогла сфотографировать оставшиеся 13 деревьев. На следующий день, когда Саша шёл в гости к Маше, начиная с восьмой яблони с каждого дерева он срывал по одному листу. Сколько листов сорвал Саша?

Ответ: 24.

7 класс, задача 5

Задача 5.1. На урок физкультуры пришли 27 семиклассников, некоторые из них принесли по одному мячу. Иногда в течение урока кто-нибудь из семиклассников отдавал свой мяч другому семикласснику, у которого мяча не было.

В конце урока N семиклассников сказали: «Я получал мячи реже, чем их отдавал!». Найдите наибольшее возможное значение N, если известно, что никто из ребят не соврал.

Ответ: 13.

Решение. Если семиклассник получал мяч реже, чем его отдавал, то первоначально у него был мяч, а в конце уже не было. Таким образом, в начале урока у ребят суммарно было хотя бы N мячей, которые в итоге оказались у кого-то из оставшихся $27 - N$ ребят. Следовательно, $N \leqslant 27 - N$, откуда получаем, что $N \leqslant 13$ (поскольку N — целое число).

Осталось показать, что значение $N = 13$ возможно. Для удобства пронумеруем семиклассников числами от 1 до 27. Пусть ребята с номерами $1, 2, \ldots, 13$ принесли с собой на урок по мячу, и в течение урока семиклассник с номером i отдал мяч семикласснику с номером $13 + i$ (для всех $i = 1, 2, \ldots, 13$). Ясно, что условие задачи выполняется. □

Задача 5.2. На урок физкультуры пришли 25 семиклассников, некоторые из них принесли по одному мячу. Иногда в течение урока кто-нибудь из семиклассников отдавал свой мяч другому семикласснику, у которого мяча не было.

В конце урока N семиклассников сказали: «Я получал мячи реже, чем их отдавал!». Найдите наибольшее возможное значение N, если известно, что никто из ребят не соврал.

Ответ: 12.

Задача 5.3. На урок физкультуры пришли 23 семиклассника, некоторые из них принесли по одному мячу. Иногда в течение урока кто-нибудь из семиклассников отдавал свой мяч другому семикласснику, у которого мяча не было.

В конце урока N семиклассников сказали: «Я получал мячи реже, чем их отдавал!». Найдите наибольшее возможное значение N, если известно, что никто из ребят не соврал.

Ответ: 11.

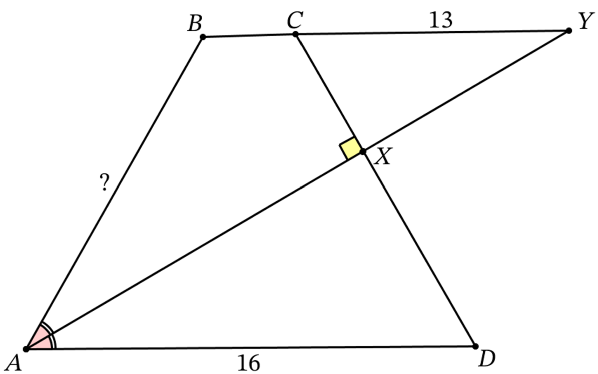
Задача 5.4. На урок физкультуры пришли 29 семиклассников, некоторые из них принесли по одному мячу. Иногда в течение урока кто-нибудь из семиклассников отдавал свой мяч другому семикласснику, у которого мяча не было.

В конце урока N семиклассников сказали: «Я получал мячи реже, чем их отдавал!». Найдите наибольшее возможное значение N, если известно, что никто из ребят не соврал.

Ответ: 14.

7 класс, задача 6

Задача 6.1. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD \parallel BC$. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в точке X, а продолжение стороны BC за точку C — в точке Y. Оказалось, что $\angle AXC = 90°$. Найдите длину отрезка AB, если известно, что $AD = 16$ и $CY = 13$.



Ответ: 14,5.

Решение. Пусть $AB = a$. Заметим, что $\angle BYA = \angle YAD = \angle YAB$. Получаем, что треугольник ABY — равнобедренный ($AB = BY$), и $BC = BY - CY = AB - CY = a - 13$ (рис. 1).

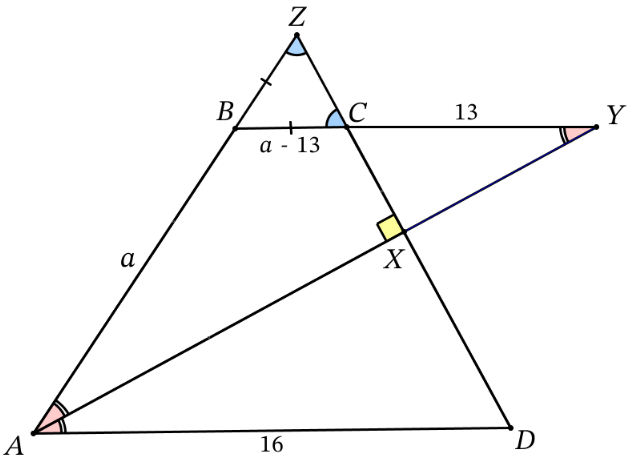


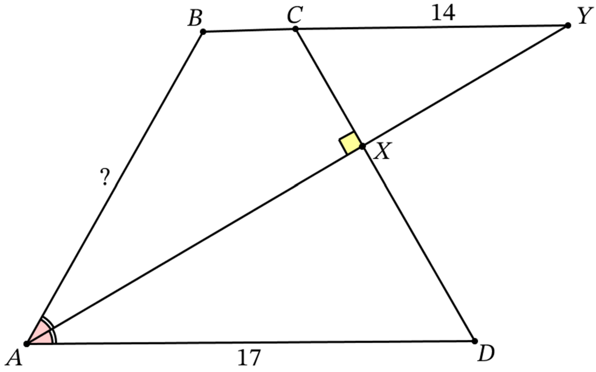
Рис. 1: к решению задачи 6.1

Продлим лучи AB и DC до пересечения в точке Z. В треугольнике ADZ биссектриса AX совпала с высотой, поэтому он равнобедренный ($AZ = AD$). Кроме этого, $\angle BZC = \angle ADC = \angle BCZ$, поэтому треугольник BCZ тоже равнобедренный ($BZ = BC$).

Отрезок AZ, с одной стороны, равен AD, то есть 16. С другой стороны, $AZ = AB + BZ = AB + BC = a + (a - 13) = 2a - 13$. Решаем получившееся уравнение:

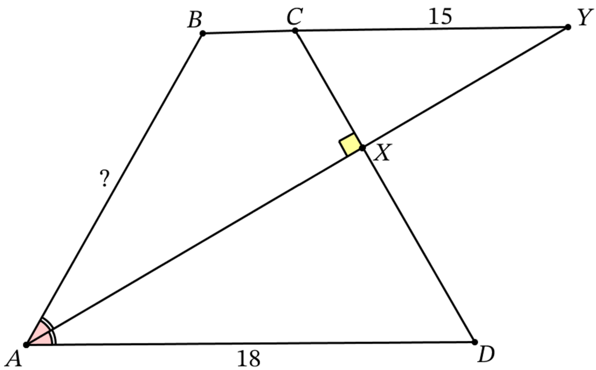
$$16 = 2a - 13;$$
$$2a = 29;$$
$$a = 14{,}5. \qquad \square$$

Задача 6.2. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD \parallel BC$. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в точке X, а продолжение стороны BC за точку C — в точке Y. Оказалось, что $\angle AXC = 90°$. Найдите длину отрезка AB, если известно, что $AD = 17$ и $CY = 14$.



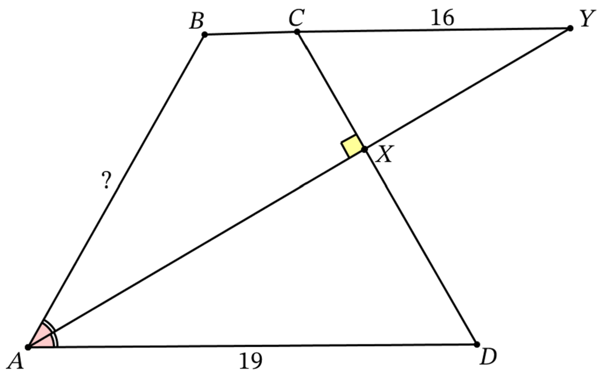
Ответ: 15,5.

Задача 6.3. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD \parallel BC$. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в точке X, а продолжение стороны BC за точку C — в точке Y. Оказалось, что $\angle AXC = 90°$. Найдите длину отрезка AB, если известно, что $AD = 18$ и $CY = 15$.



Ответ: 16,5.

Задача 6.4. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD \parallel BC$. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в точке X, а продолжение стороны BC за точку C — в точке Y. Оказалось, что $\angle AXC = 90°$. Найдите длину отрезка AB, если известно, что $AD = 19$ и $CY = 16$.



Ответ: 17,5.

7 класс, задача 7

Задача 7.1. Каждый из семи гномов загадал по натуральному числу. Все они знают, что загадали остальные. Белоснежка спросила у каждого из гномов, какое число он загадал.

- 1-й гном промолчал.
- 2-й гном сказал: «Моё число равно числу первого гнома».
- 3-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого и второго гномов».
- 4-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого, второго и третьего гномов».
- …
- 7-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого, второго, третьего, четвёртого, пятого и шестого гномов».

Известно, что сумма семи чисел, загаданных гномами, равна 46. Также известно, что ровно один гном соврал. Какое число мог загадать совравший гном? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 7 или 14.

Решение. Пусть первый гном загадал число a_1, второй загадал число a_2, третий — a_3, …, седьмой — a_7.

Предположим, что 7-й гном сказал правду. Тогда его число равно ровно половине от суммы всех чисел, то есть $a_7 = \frac{46}{2} = 23$. Рассуждая аналогично, получаем, что тогда шестой гном точно соврал, ведь иначе его число равнялось бы $\frac{23}{2}$.

Следовательно, первые пять гномов не соврали, и они загадали числа $a_1 = x$, $a_2 = x$, $a_3 = 2x$, $a_4 = 4x$, $a_5 = 8x$. Тогда

$$23 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 16x + a_6 > 16x.$$

Поскольку x — натуральное число, $x = 1$ (если $x \geqslant 2$, то $16x > 23$). Отсюда нетрудно вычислить $a_6 = 23 - 16 \cdot 1 = 7$ — это число, загаданное совравшим гномом. Ясно, что числа $1, 1, 2, 4, 8, 7, 23$ подходят под условие.

Предположим, что 7-й гном соврал.

Следовательно, первые шесть гномов не соврали, и они загадали числа $a_1 = x$, $a_2 = x$, $a_3 = 2x$, $a_4 = 4x$, $a_5 = 8x$, $a_6 = 16x$. Тогда

$$46 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 32x + a_7 > 32x.$$

Поскольку x — натуральное число, $x = 1$ (если $x \geqslant 2$, то $32x > 46$). Отсюда нетрудно вычислить $a_7 = 46 - 32 \cdot 1 = 14$ — это число, загаданное совравшим гномом. Ясно, что числа $1, 1, 2, 4, 8, 16, 14$ подходят под условие. $\square$

Задача 7.2. Каждый из семи гномов загадал по натуральному числу. Все они знают, что загадали остальные. Белоснежка спросила у каждого из гномов, какое число он загадал.

- 1-й гном промолчал.
- 2-й гном сказал: «Моё число равно числу первого гнома».
- 3-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого и второго гномов».
- 4-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого, второго и третьего гномов».
- …
- 7-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого, второго, третьего, четвёртого, пятого и шестого гномов».

Известно, что сумма семи чисел, загаданных гномами, равна 42. Также известно, что ровно один гном соврал. Какое число мог загадать совравший гном? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 5, 10.

Задача 7.3. Каждый из семи гномов загадал по натуральному числу. Все они знают, что загадали остальные. Белоснежка спросила у каждого из гномов, какое число он загадал.

- 1-й гном промолчал.
- 2-й гном сказал: «Моё число равно числу первого гнома».
- 3-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого и второго гномов».

- 4-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого, второго и третьего гномов».
- …
- 7-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого, второго, третьего, четвёртого, пятого и шестого гномов».

Известно, что сумма семи чисел, загаданных гномами, равна 54. Также известно, что ровно один гном соврал. Какое число мог загадать совравший гном? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 11, 22.

Задача 7.4. Каждый из семи гномов загадал по натуральному числу. Все они знают, что загадали остальные. Белоснежка спросила у каждого из гномов, какое число он загадал.

- 1-й гном промолчал.
- 2-й гном сказал: «Моё число равно числу первого гнома».
- 3-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого и второго гномов».
- 4-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого, второго и третьего гномов».
- …
- 7-й гном сказал: «Моё число равно сумме чисел первого, второго, третьего, четвёртого, пятого и шестого гномов».

Известно, что сумма семи чисел, загаданных гномами, равна 58. Также известно, что ровно один гном соврал. Какое число мог загадать совравший гном? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 13, 26.

7 класс, задача 8

Задача 8.1. Обозначим через $s(n)$ сумму всех нечётных цифр числа n. Например, $s(4) = 0$, $s(173) = 11$, $s(1623) = 4$.

Вычислите значение суммы $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(321)$.

Ответ: 1727.

Решение. Будем по отдельности считать сумму нечётных цифр по разрядам.

Разряд единиц.

Среди чисел от 1 до 321 есть 32 полных десятка:

- от 1 до 10;
- от 11 до 20;
- от 21 до 30;
- …
- от 311 до 320.

В каждом десятке сумма нечётных цифр в разряде единиц равняется $1+3+5+7+9 = 25$. Учитывая также последнее число 321 с цифрой 1 в разряде единиц, получаем, что сумма всех нечётных цифр из разряда единиц равна

$$25 \cdot 32 + 1 = 801.$$

Разряд десятков.

Рассмотрим, у каких чисел стоят нечётные цифры в разряде десятков.

- Цифра 1 в разряде десятков стоит у 40 чисел: от 10 до 19, от 110 до 119, от 210 до 219, от 310 до 319.
- Цифра 3 в разряде десятков стоит у 30 чисел: от 30 до 39, от 130 до 139, от 230 до 239.
- Цифра 5 в разряде десятков стоит у 30 чисел: от 50 до 59, от 150 до 159, от 250 до 259.
- Цифра 7 в разряде десятков стоит у 30 чисел: от 70 до 79, от 170 до 179, от 270 до 279.
- Цифра 9 в разряде десятков стоит у 30 чисел: от 90 до 99, от 190 до 199, от 290 до 299.

Итого сумма всех нечётных цифр из разряда десятков равна

$$1 \cdot 40 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 30 + 7 \cdot 30 + 9 \cdot 30 = 760.$$

Разряд сотен.

Рассмотрим, у каких чисел стоят нечётные цифры в разряде сотен.

- Цифра 1 в разряде сотен стоит у 100 чисел: от 100 до 199.
- Цифра 3 в разряде десятков стоит у 22 чисел: от 300 до 321.

Итого сумма всех нечётных цифр из разряда сотен равна

$$1 \cdot 100 + 3 \cdot 22 = 166.$$

Осталось лишь найти общую сумму:

$$801 + 760 + 166 = 1727.$$

$\square$

Задача 8.2. Обозначим через $s(n)$ сумму всех нечётных цифр числа n. Например, $s(4) = 0$, $s(173) = 11$, $s(1623) = 4$.

Вычислите значение суммы $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(320)$.

Ответ: 1723.

Задача 8.3. Обозначим через $s(n)$ сумму всех нечётных цифр числа n. Например, $s(4) = 0$, $s(173) = 11$, $s(1623) = 4$.

Вычислите значение суммы $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(322)$.

Ответ: 1730.

Задача 8.4. Обозначим через $s(n)$ сумму всех нечётных цифр числа n. Например, $s(4) = 0$, $s(173) = 11$, $s(1623) = 4$.

Вычислите значение суммы $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(323)$.

Ответ: 1736.