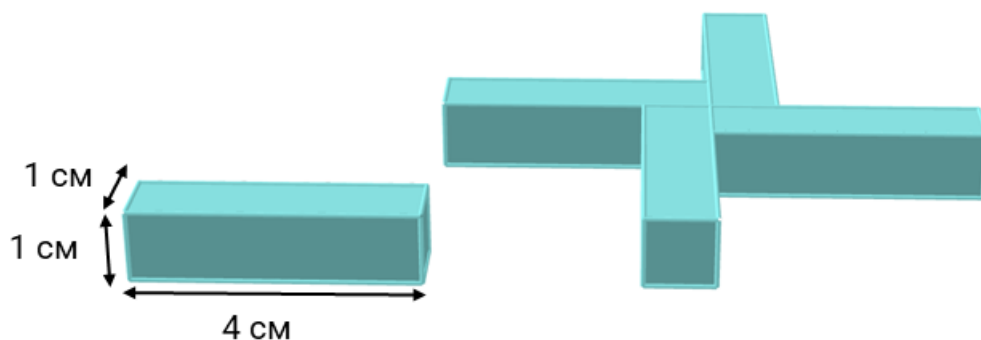


8 класс

8-1. Коля сложил из четырёх одинаковых брусков фигуру, изображённую на рисунке. Чему равна площадь поверхности этой фигуры? Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ. 64.

Решение. Площадь поверхности одного бруска равна 18 см^2 . Из этой площади 2 см^2 «теряется» на стыки с другими брусками, итого остаётся площадь $18 - 2 = 16 \text{ см}^2$. Так как брусков 4, то ответ $4 \cdot 16 = 64 \text{ см}^2$.

8-2. На далёкой планете в мангровых лесах живёт популяция жабов. Количество жабов, которое рождается каждый год — это число, на 1 большее, чем разность количества жабов, родившихся в предыдущие два года (из большего числа вычитается меньшее).

Например, если в прошлом году родились 5 жабов, а в позапрошлом — 2, то в этом году родятся 4 жаба; если же в прошлом году родились 3 жаба, а в позапрошлом — 10, то в этом году родятся 8 жабов.

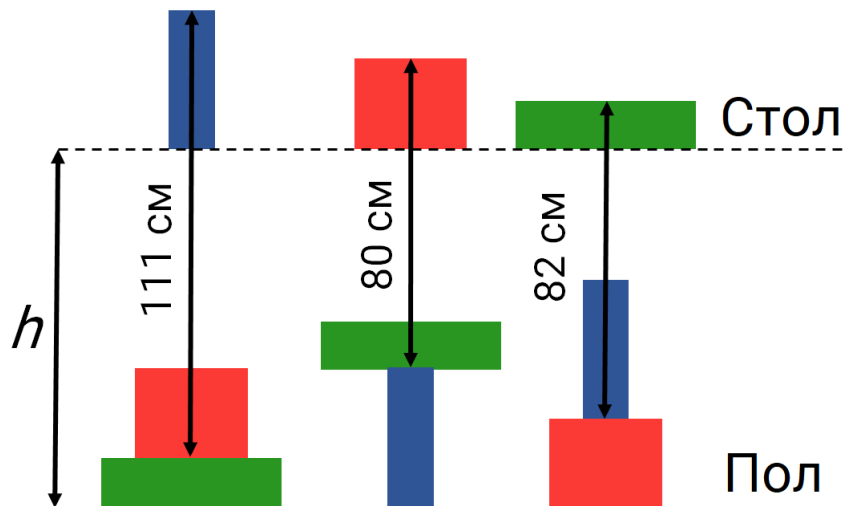
В 2020 году родились 2 жаба, а в 2021 — 9. В каком ближайшем году впервые родится всего 1 жаб?

Ответ. 2033.

Решение. Это достаточно простая задача, в которой единственное, что нужно сделать — это правильно понять условие и применить его необходимое количество раз. Умение правильно понять условие — важное умение при решении задач!

Применяя описанный в условии алгоритм, получаем, что количество жабов, которые рождаются на планете, равно $2 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, то есть должно пройти ещё 12 лет, начиная с 2021 года, откуда ответ 2033.

8-3. Оля купила три подарка и упаковала их в три прямоугольные коробки: синюю, красную и зелёную. Она попробовала поставить эти подарки разными способами: один на стол, и два друг на друга на пол. На рисунке даны некоторые расстояния. Найдите высоту стола h . Ответ выразите в сантиметрах.

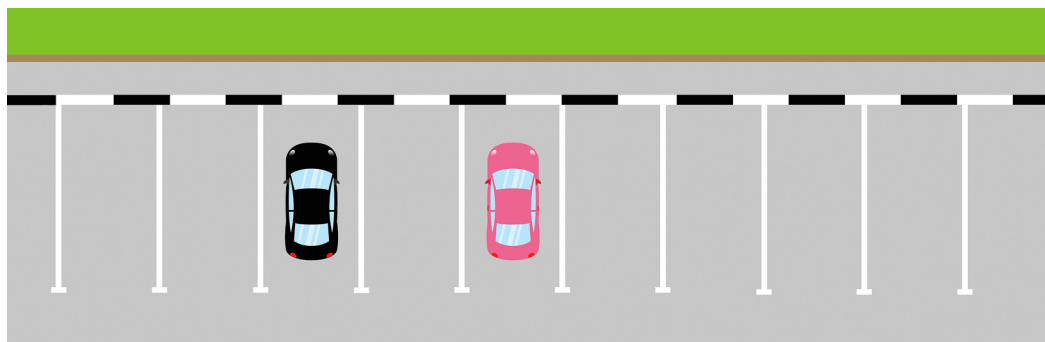


Ответ. 91.

Решение. Пусть высота синего прямоугольника равна b , высота красного прямоугольника равна r , а высота зелёного прямоугольника равна g . Тогда, согласно условию, $h + b - g = 111$, $h + r - b = 80$, $h + g - r = 82$. Складывая все эти равенства, получаем $3h = 273$, откуда $h = 91$.

8-4. На автостоянке имеется 50 парковочных мест, пронумерованных числами от 1 до 50. Сейчас все парковочные места пусты. На парковку приехали две машины: чёрная и розовая. Сколько существует способов размещения этих машин на парковке таким образом, что между ними будет оставаться хотя бы одно пустое парковочное место?

Если чёрная и розовая машины меняются местами, то это считается новым способом.



Ответ. 2352.

Решение I. Аккуратно переберём случаи расположения чёрной машины. Если она встала на место с номером 1 или 50, то розовая машина может встать на любое из 48

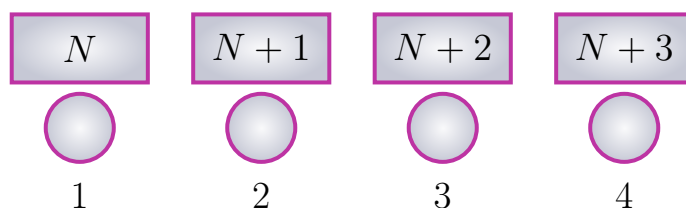
мест (с номерами от 3 до 50 или от 1 до 48 соответственно). Если же чёрная машина встала на место с номером от 2 до 49, то у розовой машины всего 47 вариантов размещения (все, кроме парковочного места чёрной машины и двух соседних с ней мест). Итого, всего вариантов $2 \cdot 48 + 48 \cdot 47 = 2352$.

Решение II. Посчитаем количество вариантов как разность: из числа всех возможных вариантов расстановки двух машин отнимем «лишнее» — количеством вариантов, в которых они соседствуют.

Всего вариантов у нас $50 \cdot 49$: для каждого из 50 способов выбрать место для чёрной машины есть по 49 способов выбрать место для розовой. Вариантов, где машины стоят рядом всего $49 \cdot 2$: для каждого из 49 способов выбрать два соседних парковочных места есть по 2 способа поставить на них машины.

В итоге ответ $50 \cdot 49 - 49 \cdot 2 = 2352$.

8-5. Вася записал в прямоугольнички последовательные натуральные числа N , $N + 1$, $N + 2$ и $N + 3$. Под каждым прямоугольничком он написал в кружочек сумму цифр соответствующего числа.



Сумма чисел в первом и втором кружочках оказалась равна 200, а сумма чисел в третьем и четвёртом кружочках равна 105. Чему равна сумма чисел во втором и третьем кружочках?

Ответ. 103.

Решение. Если между двумя последовательными натуральными числами нет перехода через десяток, сумма цифр большего из них на 1 больше суммы цифр меньшего, и поэтому сумма этих двух сумм нечётна. Так как число 200 чётно, между N и $N + 1$ есть переход через десяток, и $N + 1$ оканчивается на 0. Но тогда число в четвёртом кружочке на 2 больше числа во втором, и потому искомая сумма равна $105 - 2 = 103$.

Комментарий. Указанные в условии числа действительно существуют: например, в качестве N подойдёт число $\underbrace{99 \dots 9}_5 \text{ шт.} \underbrace{599 \dots 9}_{11 \text{ шт.}}$.

8-6. В детском саду 150 детей выстроились по кругу. Каждый смотрит на воспитателя, стоящего в центре круга. Часть детей одета в синие куртки, а остальные — в красные. Детей в синих куртках, левый сосед которых в красной куртке, 12 человек. Сколько детей, левый сосед которых в куртке того же цвета?

Ответ. 126.

Решение I. Пусть каждый из детей скажет одинаковые ли у него с соседом слева цвета курток. Нам нужно выяснить, сколько детей скажут «Одинаковые».

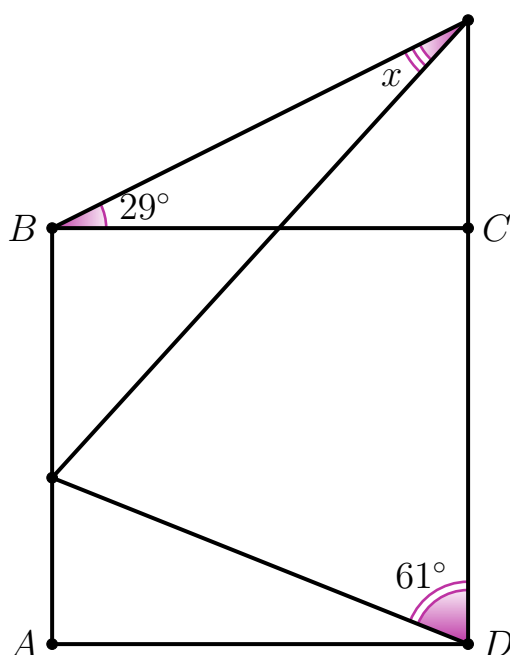
Найдём, сколько детей сказали «Разные». Заметим, что если идти по кругу, то цвета курток у таких детей чередуются. Действительно, если у кого-то красная куртка, а у его соседа слева — синяя, то дальше стоят несколько (возможно, один) детей в синих куртках, до тех пор, пока кто-то один из них не скажет, что у его соседа слева куртка красная. Аналогично, если у кого-то синяя куртка, а у его соседа слева — красная. Поэтому среди детей, которые сказали «Разные», поровну детей в красных и синих куртках. По условию, детей в красных куртках 12. Значит, всего детей, сказавших «Разные», в два раза больше, т.е. 24. Итого, ответ, $150 - 2 \cdot 12 = 126$.

Решение II. Мы знаем, что у 12 детей в синих куртках сосед слева одет в красную куртку. Это значит, что у в круге есть 12 пар рядом стоящих детей, правый из которых — в красной куртке, а левый — в синей. Будем такие пары обозначать СК. Что надо найти? Найти надо количество пар рядом стоящих детей, у которых куртки одинакового цвета, т.е. пары КК и СС.

Главное наблюдение для этого решения следующее: суммарное количество пар СК и СС равняется просто количеству детей в синих куртках, ведь у каждого из них есть какой-то сосед справа. Если этот сосед в красной куртке, то мы посчитаем его в парах СК, а если он в синей — то в парах СС. Итак, пусть всего детей в синих куртках s . Пар СК у нас 12, значит, пар СС тогда $s - 12$.

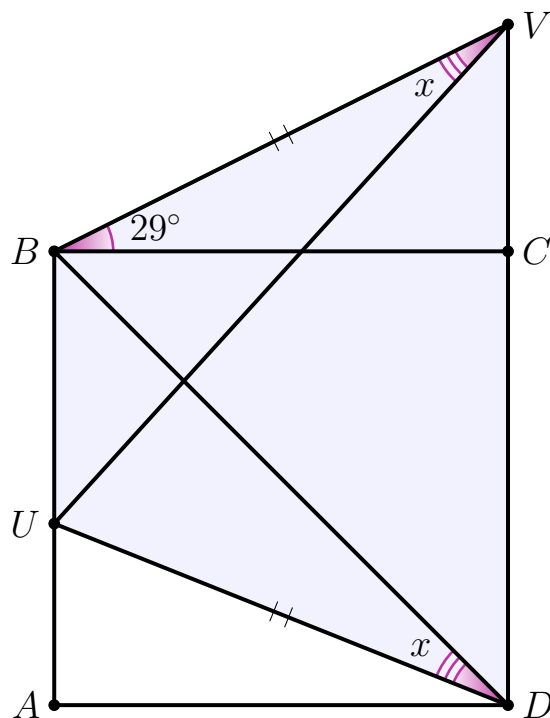
Аналогично вышенаписанному, суммарное количество пар СК и КК равно количеству детей в красных куртках. Детей в красных куртках $150 - s$, пар СК всего 12, значит, пар КК всего $138 - s$. Итого, пар СС и КК суммарно $(s - 12) + (138 - s) = 126$.

8-7. $ABCD$ — квадрат. Найдите угол x , отмеченный на картинке. Дайте ответ в градусах.



Ответ. 16° .

Решение.



Заметим, что $\angle UDA = 29^\circ$, откуда треугольники BCV и DAU равны по катету и острому углу; отсюда $BV = UD$. Поэтому четырёхугольник $DUBV$ является равнобокой трапецией, в которой углы между боковыми сторонами и диагоналями равны, т.е. $\angle BVU = \angle BDU = 61^\circ - 45^\circ = 16^\circ$.

8-8. Числа a , b и c (не обязательно целые) таковы, что

$$a + b + c = 0 \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 100.$$

Чему равно $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$?

Ответ. -103 .

Решение. Имеем

$$100 = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{-b-c}{b} + \frac{-a-c}{c} + \frac{-a-b}{a} = -3 - \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \right),$$

откуда $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = -103$.