XXX Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Региональный этап. Задания и решения

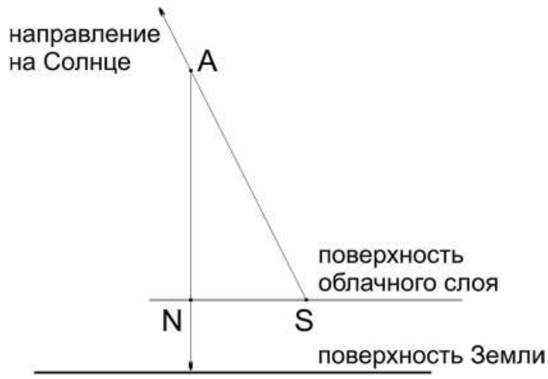
9 класс

1. Условие. Самолёт летит на высоте 10400 м. В местный полдень 21 июня самолёт пересёк параллель +50°. В это время под ним оказался плотный ровный слой облаков с высотой 2800 м и ниже. На каком расстоянии (линейном) от проекции надира на облаках будет видна тень самолета? В каком направлении (север, юг, запад, восток) относительно точки надира на облаках она будет находиться? Какова была угловая высота Солнца в этот момент?

1. Решение. Ответим сначала на последний вопрос задачи. 21 июня склонение Солнца равно $\delta = 23.4°$, и его высоту в полдень (это момент верхней кульминации) легко найти по формуле:

$$h = 90° - \varphi + \delta = 63.4°.$$

Итак, угловая высота Солнца в рассматриваемый момент времени составляла 63.4°. Теперь мы можем ответить на первый вопрос задачи. Нарисуем прямоугольный треугольник с вершинами в самолёте (A), его тени (S) и точки надира на облачном слое (N).



Один из катетов этого треугольника равен $AN = 10400 - 2800 = 7600$ м, а второй катет (NS) является искомой величиной. Угол $\angle NSA$ – это угол между горизонтом и направлением на Солнце. Он равен угловой высоте Солнца над горизонтом: $\angle NSA = h = 63.4°$. Соответственно, угол «при самолёте» равен $\angle NAS = 90° - 63.4° = 26.6°$. Отсюда расстояние от тени до точки надира равно $NS = 7600 \text{ tg } 26.6° \approx 3800$ м.

В средних широтах Северного полушария Земли Солнце в полдень находится к югу от отвесной линии. Поэтому тень будет находиться к северу от отвесной линии и, соответственно, точки надира на облаках.

Ответ: 1) примерно 3800 м; 2) к северу; 3) 63.4°.

1. Система оценивания.

Этап 1. (1 балл): Понимание картины происходящего, выраженное рисунком или верным ходом решения.

Этап 2. (1 балл): Запись формулы высоты в верхней кульминации.

Этап 3. (2 балла): Вычисление угловой высоты Солнца с ответом в диапазоне [63°; 64°]. За верный ответ без формулы или вычислений ставится 1 балл.

Этап 4. (1 балл): Вычисление высоты самолёта над облачным слоем.

Этап 5. (1 балл): Определение направления, в котором расположена тень относительно точки надира.

Этап 6. (2 балла): Определение искомого расстояния.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

2. Условие. На поверхности Солнца появилось стационарное экваториальное пятно. Для его изучения был запущен на орбиту вокруг Солнца космический аппарат так, чтобы он находился постоянно над этим пятном. В силу конструкции аппарата передавать данные он может только в противоположную от точки наблюдения сторону, а угол поля зрения (диаграмма направленности) антенны составляет θ = 3°. С каким промежутком времени и как долго на Земле можно будет принимать сигнал от этого спутника? Орбиты аппарата и Земли считать круговыми. Плоскость орбиты Земли считать совпадающей с плоскостью экватора Солнца и плоскостью орбиты аппарата. Период осевого вращения Солнца составляет 24.47 суток.

2. Решение. Экваториальный период обращения Солнца составляет 24.47 суток. Следовательно, ровно с таким же периодом должен делать оборот вокруг Солнца аппарат. Для наступления момента, благоприятного для связи, необходимо нахождение на одной прямой Солнца, аппарата и Земли. Эта конфигурация для Земли будет соответствовать нижнему соединению аппарата с Солнцем. Время между двумя последовательными нижними кульминациями аппарата равно его синодическому периоду. Найдём его:

$$\frac{1}{S_{\text{А}}} = \frac{1}{T_{\text{А}}} - \frac{1}{T_{\oplus}},$$

$$S_{\text{А}} = \frac{T_{\text{А}} T_{\oplus}}{T_{\oplus} - T_{\text{А}}} = \frac{365.2564 \cdot 24.47}{365.2564 - 24.47} = 26.23\text{суток.}$$

Здесь $T_{\text{А}}$ – экваториальный период обращения Солнца, а $T_{\oplus}$ – сидерический период Земли. Теперь определим ту часть орбиты, которая будет благоприятна для связи аппарата с Землей. Для этого необходимо определить радиус орбиты аппарата, для чего воспользуемся третьим законом Кеплера:

$$\frac{T_{\text{А}}^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a_{\text{А}}^3}{a_{\oplus}^3},$$

где $a_{\oplus}$ – радиус орбиты Земли. Выразим расстояние от аппарата до Солнца:

$$a_{\text{А}} = a_{\oplus} \left(\frac{T_{\text{А}}}{T_{\oplus}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.5 \cdot 10^8 \left(\frac{24.47}{365.2564}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 24.7\text{млн. км.}$$

Воспользуемся системой координат, в которой Солнце и аппарат неподвижны, а Земля движется вокруг Солнца с периодом $S_{\text{А}}$. Проходя через диаграмму направленности антенны θ, Земля поворачивается на угол α < θ вокруг Солнца (см. рисунок). Пусть l – дуга земной орбиты, облучаемая антенной. В силу малости угла α можно принять, что расстояние от аппарата до Земли во время передачи не меняется и равно $a_{\oplus} - a_{\text{А}}$. Тогда можно записать два соотношения:

$$\frac{l}{a_{\oplus}} = \frac{\alpha°}{57.3°}, \qquad \frac{l}{a_{\oplus} - a_{\text{А}}} = \frac{\theta°}{57.3°}.$$

Исключим l из уравнений, поделив первое на второе:

$$\frac{a_{\oplus} - a_{\text{А}}}{a_{\oplus}} = \frac{\alpha°}{\theta°},$$

откуда

$$\alpha° = \theta° \frac{a_{\oplus} - a_{\text{А}}}{a_{\oplus}} = 3° \cdot \frac{150 \cdot 10^6 - 24.7 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6} \approx 2.5°.$$

Следовательно, время приёма сигнала с аппарата на Земле составит долю от полного синодического периода:

$$\tau = S_A \frac{\alpha°}{360°} = 26.23 \frac{2.5°}{360°} = 0.18\text{суток} \approx 4.4\text{часа}.$$

Ответ: 1) S_A = 26.23 сут. 2) τ = 4.4 ч.

2. Система оценивания.

Этап 1. (3 балла): Нахождение интервала между периодами связи, как синодического периода спутника.

Возможная ошибка – период обращения аппарата вокруг Солнца взят равным периоду вращения Солнца 24.47 суток, что даёт время приёма 0.17 суток или 4.08 часа. В этом случае пункт оценивается в 1 балл. Такая же оценка ставится в случае предположения противоположности обращения аппарата и Земли.

Этап 2. (4 балла): Определение угла видимости из центра Солнца.

Возможно точное вычисление угла с использованием теоремы синусов, что оценивается в полной мере. Если угол по умолчанию берётся равный диаграмме направленности антенны, то мы получаем время приёма 0.22 суток или 5.2 часа. В этом случае этап оценивается из 1 балла, дальнейшие пункты оцениваются в полной мере.

Этап 3. (1 балл): Нахождение времени приёма сигнала.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

3. Условие. В момент наибольшей восточной квадратуры для земного наблюдателя лучевая скорость астероида составила +20 км/с. Определите радиус орбиты астероида, считая её круговой и лежащей в плоскости эклиптики. Направления вращения Земли и астероида совпадают.

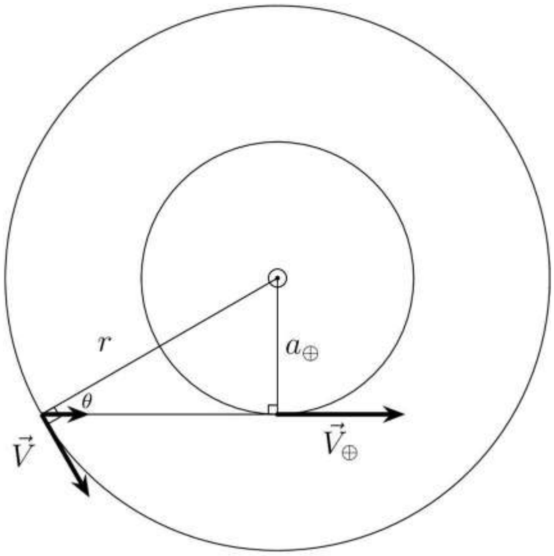
3. Решение. Лучевая скорость астероида положительна, то есть для земного наблюдателя астероид удаляется от Земли. Для определения лучевой скорости астероида V_r следует учесть проекции на луч зрения скорости как астероида V, так и наблюдателя, то есть скорость Земли $V_\oplus$. В момент квадратуры полная скорость Земли направлена вдоль луча зрения, от скорости астероида необходимо взять компоненту вдоль луча зрения:

$$V_r = V_\oplus - V cos(90° - \theta) = V_\oplus - V sin\theta.$$

Здесь θ – угол при астероиде между направлением на Солнце и на Землю. Из рисунка

$$sin\theta = \frac{a_\oplus}{r},$$

где r и $a_\oplus$ – радиусы орбиты астероида и Земли соответственно.



Также заметим, что на круговой орбите скорость обратно пропорциональна квадратному корню из радиуса орбиты:

$$V = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}, \qquad V = V_\oplus \cdot \sqrt{\frac{a_\oplus}{r}}.$$

Подстановка этих выражений в выражение для лучевой скорости даёт соотношение

$$V_\mathrm{r} = V_\oplus - V_\oplus \cdot \sqrt{\frac{a_\oplus}{r}} \cdot \frac{a_\oplus}{r} = V_\oplus \cdot \left(1 - \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^{3/2}\right).$$

Обозначим $\kappa = \sqrt{a_\oplus/r}$, тогда уравнение для лучевой скорости примет вид

$$\frac{V_\mathrm{r}}{V_\oplus} = 1 - \kappa^3.$$

Отсюда находим величину к:

$$\kappa = \sqrt[3]{1 - \frac{V_\mathrm{r}}{V_\oplus}} = \sqrt[3]{1 - \frac{20}{30}} = 0.69.$$

Следовательно, $r = a_\oplus / \kappa^2$ =2.1 а.е.

3. Система оценивания.

Этап 1. (4 балла): Запись выражения для лучевой скорости с учётом скорости движения Земли. Возможная ошибка: учёт только скорости астероида, считая Землю неподвижной. При правильных вычислениях это дает ответ 1.3 а.е. В этом случае за данный этап выставляется только 1 балл, остальные пункты оцениваются из полного балла. Участник может также ошибиться в направлении лучевой скорости (приближение или удаление), а также в направлении квадратуры (западная или восточная). Численно эти ошибки могут компенсировать друг друга, однако оценка за этап снижается на 2 балла.

Этап 2. (2 балла): Связь скорости астероида и радиуса орбиты. Соотношение может быть выведено или записано без вывода.

Этап 3. (2 балла): Запись уравнения для радиуса орбиты (1 балл), решение уравнения и получение итогового ответа (1 балл).

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

4. Условие. Обнаружена планетная система у звезды радиусом $R = 2R_\odot$, которая имеет три планеты, расположенные близко к родительской звезде: горячий нептун и два горячих юпитера ($R_1 = 2R_{ю}$, $R_2 = 1.4R_{ю}$, $R_3 = 1.5R_{н}$). Найдите максимальное падение блеска в звёздных величинах этой системы для наблюдателя, находящегося достаточно далеко от системы в плоскости орбит планет этой системы. Потемнением диска звезды к краю пренебречь. $R_\odot$ – радиус Солнца, $R_{ю}$ – радиус Юпитера и $R_{н}$ – радиус Нептуна.

4. Решение. Максимальное падение блеска произойдёт в тот момент, когда все три планеты окажутся на диске звезды, но не будут перекрывать друг друга. Поток от звезды I пропорционален видимой площади звезды S, следовательно,

$$I_0 \sim S = \pi R^2, \qquad I \sim S - S_1 - S_2 - S_3,$$

где I_0 – поток от звезды вне минимумов блеска, $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$ и $S_3 = \pi R_3^2$. Поделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{I}{I_\odot} = \frac{R^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2}{R^2} = \frac{4R_\odot^2 - 4R_{ю}^2 - 1.96R_{ю}^2 - 1.25R_{н}^2}{4R_\odot^2} = 0.984.$$

Чтобы найти падение блеска в звёздных величинах, воспользуемся формулой Погсона:

$$\Delta m = -2.5\lg\frac{I}{I_\odot} = 0.018.$$

4. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): Максимальное падение блеска, когда все три планеты окажутся на диске звезды (это может быть просто видно из решения).

Этап 2. (1 балл): Поток от звезды пропорционален площади.

Этап 3. (1 балл): Поток при максимальном падении блеска пропорционален $S_\odot - S_1 - S_2 - S_3$.

Этап 4. (1 балл): Нахождение $I / I_\odot = 0.984$ (может быть не посчитано численно, но иметь правильную формулу).

Этап 5. (1 балл): Правильная запись формулы Погсона для этой задачи.

Этап 6. (2 балла): Полученное падение блеска в звёздных величинах

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

5. Условие. В телескоп с диаметром 20 см и фокусным расстоянием 1000 мм фотографируют Марс в момент великого противостояния (расстояние между Марсом и Землей 0.38 а.е.) на ПЗС-матрицу с размером пикселя 5 мкм. Сколько пикселей занимает Марс? Сколько фотонов будет в каждом пикселе при выдержке 1/200 секунды?

Считайте, что от звезды нулевой звёздной величины приходит 10^6 фотонов за 1 секунду на 1 см^2. Звёздная величина Марса во время великих противостояний -2.9^m.

5. Решение. На первом этапе задачи определим угловой размер Марса в противостоянии. Воспользуемся формулой углового размера:

$$\rho'' = \frac{206265 \cdot D}{r_0} = 24.6''.$$

Теперь определим линейный размер изображения Марса в фокальной плоскости

$$x = F \cdot \rho.$$

Здесь ρ – должно быть подставлено в радианах. Подставляем значения и получаем

$$x = F \cdot \rho = 1000\text{мм} \cdot \frac{24.6}{206265} = 0.1193\text{мм} = 119.3\text{мкм}.$$

Согласно условию, один пиксель имеет размер 5 мкм. Тогда линейный диаметр изображения Марса составит $d = 119.3 / 5 \approx 23.9$ пикселя. Поскольку Марс в противостоянии, то его фаза равна 1, и на изображении будет виден весь диск Марса. Марс при этом займёт

$$N_{\text{px}} = \pi \cdot (d/2)^2 = 447\text{пикселей}.$$

К такому же ответу можно прийти, если сначала вычислить площадь изображения Марса в микрометрах, а затем разделить на площадь одного пикселя – 25 мкм^2.

Теперь определим число фотонов, пришедшее на 1 пиксель за время экспозиции. Марс во время великих противостояний имеет видимую звёздную величину -2.9^m. Определим количество фотонов, приходящих от Марса за время экспозиции:

$$N = N_0 \cdot \Delta t \cdot S \cdot 10^{-0.4(m-m_0)},$$

где Δt – это выдержка фотографии, показывающая, сколько времени открыт затвор. Количество фотонов линейно растёт с увеличением выдержки. S – площадь объектива телескопа, N_0 – число фотонов, приходящих от звезды 0^m, а множитель $10^{-0.4(m-m_0)}$ показывает, насколько больше освещённость от объекта, чем от звезды нулевой звёздной величины.

Будем использовать предположение, что все фотоны имеют одинаковую энергию. Тогда соотношение освещённостей равно отношению числа фотонов. Вычислим общее число фотонов, которые придут на ПЗС камеру:

$$N = 10^6 \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{\pi 20^2}{4} \cdot 10^{-0.4(-2.9-0)} = 22.7 \cdot 10^6.$$

Для определения числа фотонов в одном пикселе разделим общее число фотонов на число пикселей:

$$N_1 = \frac{22.7 \cdot 10^6}{447} = 50.8 \cdot 10^3.$$

Это и будет ответом на задачу.

Ответ: 1) 452; 2) около 50 тысяч.

5. Система оценивания.

Этап 1. (1 балл): Определение углового размера Марса.

Этап 2. (3 балла): Определение числа пикселей ПЗС, в которых будет изображение Марса. Первый балл ставится за определение линейного размера изображения через фокусное расстояние. Второй балл за масштаб изображения в пикселях. Третий балл за определение площади Марса в пикселях.

Если участник неверно нашел угловой размер Марса или перепутал радиус с диаметром, за Этап 2 он получает не более 1 балла, если получил диаметр изображения Марса правильно для своего значения углового размера.

Участник может считать целое число пикселей, освещаемых Марсом. Так диаметр Марса может попадать на 24, а может и на 25 пикселей. Это несколько меняет итоговый ответ, но ошибкой не является.

Этап 3. (3 балла): Определение общего числа фотонов. 1 балл ставится за правильное использование формулы Погсона (возможно с результатом, что Марс ярче звезды 0^m в 14.45 раза). Второй балл – за запись выражения для полного числа фотонов в общем виде. 3-й балл за корректный численный подсчёт. Возможно, что участник делает все вычисления в конце. Тогда этот балл выставляется только при правильном конечном ответе.

Этап 4. (1 балл): Определение числа фотонов, оказавшихся в одном пикселе. Данный балл выставляется только при правильном численном ответе в отсутствие ошибок на предыдущих этапах.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

6. Условие. В серии книг «Космоолухи» цивилизация нашла способ сильно сократить время перемещения по Вселенной. Космические корабли могут совершить прыжок в пространстве очень быстро на любое расстояние до 0.5 кпк. Главные герои занимаются грузоперевозками. В какой-то момент они стартуют с Земли и имеют заказы к планетам или астероидам около звезд: Алькор, Звезды Людвига и α Малой Медведицы. Они хотят пройти кратчайшим путем, завезя все заказы и вернувшись на родную планету, Новый Бойбруйск, до Нового Года. Постройте для них трассу (порядок звезд, в котором им надо лететь) и посчитайте длину этой трассы. Вам дана вырезка из навигационного атласа XXV века.

Звезда	**Прямое восхождение**	**Склонение**	**Параллакс**
Алькор	13ч 25м	+54° 59′	0.0399″
Звезда Людвига	13ч 25м	+54° 53′	0.0109″
α Малой Медведицы	02ч 31м	+90° 00′	0.0073″
Новый Бойбруйск	01ч 25м	+73° 00′	0.0050″

6. Решение. Найдём расстояния от Земли до всех этих объектов:

$$r(\text{пк}) = \frac{1}{\pi''},$$

где π – параллакс.

	Алькор	**зв. Людвига**	**Полярная**	**НБ**
Расстояние от Земли	25.06 пк	91.74 пк	137 пк	200 пк

Найдём угловое расстояние попарно между всеми звёздами, при наблюдении с Земли. Заметим, что у нас есть Полярная звезда (α Малой Медведицы), склонение которой дано как +90° 00′, а значит, её прямое восхождение значения не имеет, и угловое расстояние от неё до всех звёзд, это просто полярное расстояние. Также заметим, что Алькор и Звезда Людвига лежат на одном меридиане, также, как и Новый Бойбруйск (НБ). Тогда угловое расстояние между звёздами по одну сторону от полюса равно разности их склонений, и сумме полярных расстояний для звёзд по разную сторону от полюса. Итого:

Угол β	**Алькор**	**зв. Людвига**	**Полярная**	**НБ**
Алькор	0	00° 06′	35° 01′	52° 01′
зв. Людвига	00° 06′	0	35° 07′	52° 07′
Полярная	35° 01′	35° 07′	0	17° 00′
НБ	52° 01′	52° 07′	17° 00′	0

Нам известны расстояния до звёзд и угол между ними β. Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы найти расстояние между звёздами:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 r_2 cos\beta}.$$

Итого:

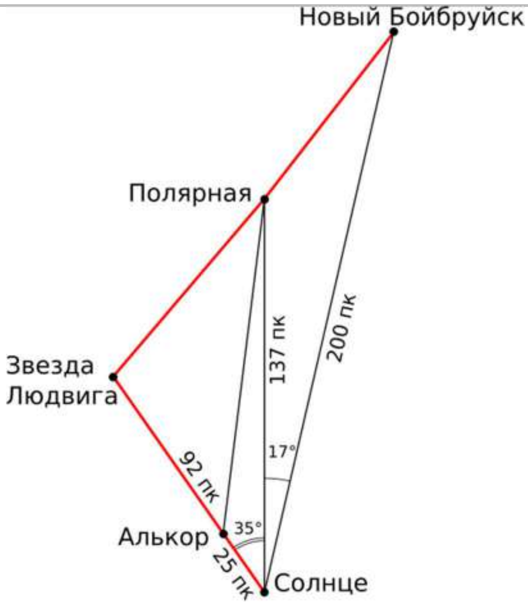
Взаимные расстояния	**Алькор**	**зв. Людвига**	**Полярная**	**НБ**
Земля	25.06 пк	91.74 пк	137 пк	200 пк
Алькор	0	66.68 пк	117.34 пк	185.63 пк
зв. Людвига	66.68 пк	0	81.38 пк	160.88 пк
Полярная	117.34 пк	81.38 пк	0	79.78 пк
НБ	185.63 пк	160.88 пк	79.78 пк	0

Все расстояния меньше 0.5 кпк, значит просто считаем минимальную трассу, не забывая, что Новый Бойбруйск должен оказаться в конце:

<table>
<tr><th>Старт</th><th>Первая остановка</th><th>Вторая остановка</th><th>Третья остановка</th><th>Итоговая длинна пути до НБ, пк</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Земля</td><td rowspan="2">Алькор</td><td>зв. Людвига</td><td>Полярная</td><td>252.9</td></tr>
<tr><td>Полярная</td><td>зв. Людвига</td><td>384.7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">зв. Людвига</td><td>Алькор</td><td>Полярная</td><td>355.5</td></tr>
<tr><td>Полярная</td><td>Алькор</td><td>476.1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Полярная</td><td>Алькор</td><td>зв. Людвига</td><td>481.9</td></tr>
<tr><td>зв. Людвига</td><td>Алькор</td><td>470.7</td></tr>
</table>

Минимальная длина трассы составляет 252 пк (Земля – Алькор – звезда Людвига – Полярная – Новый Бойбруйск).

Решение задачи можно облегчить, аккуратно нарисовав чертеж. Тогда все расстояния между звездами можно просто измерить линейкой, а наикратчайшая трасса (выделена на рисунке) становится очевидной.



6. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): Найдены расстояния от Земли до всех объектов (1 балл за формулу, 1 балл за вычисления).

Этап 2. (1 балл): Объяснение, что все звезды лежат в одной плоскости.

Этап 3. (2 балла): Нахождение всех попарных угловых расстояний.

Этап 4. (2 балла): Нахождение попарных расстояний между звездами (1 балл за формулу, 1 балл за вычисления).

Этап 5. (1 балл): Составить минимальную трассу.

Этап 6. (1 балл): Объяснение почему минимальная.

Этап 7. (1 балл): Вычисление длинны трассы.

Правильное графическое решение также оценивается в 10 баллов.

Возможные ошибки:

- Ошибки вычислений обнуляют только тот пункт, в котором они были сделаны, если ошибки не влияют на смену трассы.
- Если ошибки вычислений приводят к смене трассы, то пункты 5, 6 не оцениваются, а итоговая оценка не превышает 7 баллов.
- Если забывают, что переход до Нового Бойбруйска тоже считается, то за пункты 5 и 7 ставится 0 баллов (в итоге за задачу не более 8 баллов)
- Если Новый Бойбруйск не является последней точкой маршрута, то пункты 5, 6 и 7 не оцениваются, а за задачу выставляется не более 7 баллов.

Максимальная оценка за задачу – 10 баллов.