Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **13 февраля 2023 г.** (I тур) и **14 февраля 2023 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2022–2023 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.1. В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами? (*А. Кузнецов, П. Кожевников*)

Ответ. Можно.

Решение. Один из многих возможных примеров показан на рисунке.

Комментарий. Только ответ, но не предъявлен пример — 0 баллов.

Неверное решение с неверным ответом — 0 баллов.

За отсутствие подсчёта сумм в правильном примере баллы не снижаются.

Если в примере какие-то суммы совпадают, но верно отмечены клетки, в которых можно делать операции — ставится 5 баллов из 7.

1	2	9	10	20	90	
1	2	0	0	0	0	3
0	0	4	0	0	0	4
0	0	5	0	0	0	5
0	0	0	10	20	0	30
0	0	0	0	0	40	40
0	0	0	0	0	50	50

Рис. 5

10.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)? (*Д. Храмцов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Многоугольник, у которого площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см), назовем *хорошим.*

Заметим, что исходный треугольник — хороший: он прямоугольный с катетами 5 см и 12 см, поэтому его площадь равна 30 см^2 и численно совпадает с его периметром, равным $5 + 12 + 13 = 30$ см.

Если какой-то многоугольник П разбит на хорошие многоугольники, то площадь П, равная сумме площадей всех многоугольников разбиения, совпала бы численно с суммой периметров многоугольников разбиения. Но сумма этих периметров больше периметра П (на удвоенную сумму длин общих частей границ многоугольников разбиения). Получаем, что площадь П больше его периметра.

Значит, никакой хороший многоугольник, в том числе данный треугольник, нельзя разрезать на несколько (больше одного) хороших многоугольников.

Комментарий. Только замечено, что исходный треугольник хороший — 1 балл.

Показано только, что хороший многоугольник не разбивается на хорошие — 5 баллов.

10.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах. (*В. Дольников*)

Решение. Предположим противное, и пусть в множестве всех школьников есть различные 30-элементные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех — пусто.

Пусть среди множеств A_1, A_2, …, A_{50} нашлись два множества B и C, имеющие $k \leqslant 28$ общих элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Для каждого элемента x_i среди множеств A_1, A_2, …, A_{50} найдём подмножество D_i, не содержащее x_i (такое подмножество D_i найдётся, иначе x_i — общий элемент множеств A_1, A_2, …, A_{50}). (Заметим, что среди подмножеств D_i могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств B, C, D_1, …, D_k — пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить еще несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остается пустым).

Значит, указанных двух множеств B и C не найдётся. Тогда пересечение любых двух из множеств A_1, A_2, …, A_{50} содержит в точности 29 элементов. Пусть $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, так что $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$. Найдём подмножество (пусть, для определенности, это подмножество — A_3), не содержащее y_1. Так как $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 29$, то A_3 обязано содержать все элементы $z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}$. Этих элементов 30 (все они различны), поэтому $A_3 = \{z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}\}$. Рассмотрим любое подмножество A_i из подмножеств $A_4, \ldots, A_{50}$. Предположим, что A_i содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда A_i должно пересекаться с каждым из подмножеств A_1, A_2, A_3 по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества K. Но $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$, значит, такого 29-элементного подмножества не существует — противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ являются подмножествами множества K. Но в множестве K количество 30-элементных подмножеств равно $31 < 50$. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда пересечение любых двух из множеств содержит в точности 29 элементов (а этот случай не разобран) — 3 балла.

10.4. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a.

(*М. Антипов*)

Решение. Из условия следует, что $(abc+1) - (ab - b + 1) = abc - ab + b = b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$. Заметим, что b и $ab - b + 1 = (a-1)b + 1$ взаимно просты, отсюда получаем, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$.

Далее замечаем, что $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1)$. Действительно, $2(ab-b+1) = (2a-2)b+2 > (2a-2)c+2 = ac+(a-2)c+ +2 \geqslant ac+2 > ac-a+1$. Значит, делимость $ac-a+1$ на $ab-b+1$ возможна только в случае равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$.

Имеем $a(c-1) = ac - a = ab - b = (a-1)b$. Видим, что $(a-1)b$ делится на a, но так как $a - 1$ и a взаимно просты, отсюда следует, что b делится на a, что и требовалось доказать.

Замечание. Приводить примеры чисел, удовлетворяющих условию, в решении не требуется. Но из решения несложно получить даже полное описание всех троек, удовлетворяющих условию: $(a, b, c) = (a, ma, (a-1)m+1)$, где $a > 1$, $m > 1$ — произвольные натуральные числа.

Комментарий. Доказано, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$ — 2 балла. В случае, если доказано, что $b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$, либо получены другие делимости, баллы не начисляются.

Доказано, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$, и далее доказано, что частное может равняться только 1, т.е. выведено равенство $ac - a + 1 = ab - b + 1$ — 5 баллов.

Доказано, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$, далее не доказано, что частное может равняться только 1, но верно рассмотрен случай равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$ — 3 балла.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность, описанную около треугольника BCD, в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180°$. (*М. Туревский, М. Дидин*)

Решение. Заметим, что $PQ \parallel CD$, так что PQ — средняя линия прямоугольного треугольника AHD. Значит, PQ пересекает гипотенузу AH в её середине M, так что $MA = MD = MH$ (см. рис. 6).

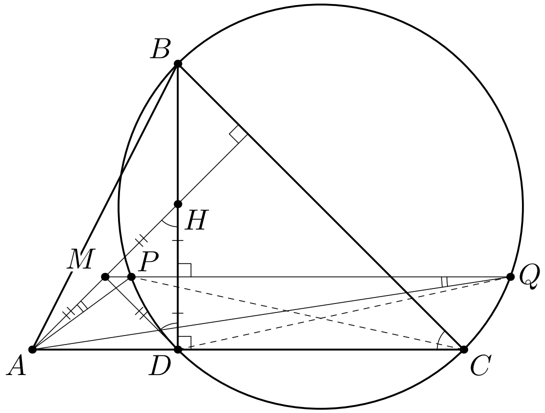

Рис. 6

Имеем $\angle MDH = \angle MHD$, а поскольку $MH \perp BC$ и $HD \perp CD$, имеем также $\angle MHD = \angle BCD$. Получаем равенство

$\angle MDH = \angle BCD$, из которого следует касание прямой MD и окружности (BCD) в точке D. Отсюда $MD^2 = MP \cdot MQ$ (по теореме о произведении отрезков секущей).

Далее, $MA^2 = MP \cdot MQ$. Значит, треугольники AMP и QMA подобны (угол AMQ общий и $MA/MP = MQ/MA$). Отсюда $\angle MQA = \angle MAP$, поэтому $\angle MPA + \angle MQA = \angle MPA + \angle MAP = \angle HMQ = 90^\circ - \angle MHD = \angle CBD$. Итак, $\angle APB + \angle AQB = \angle CBD$, и, поскольку $\angle APB + \angle AQB = (\angle MPA + \angle MQA) + (\angle MPB + \angle MQB)$, для завершения решения остаётся убедиться, что $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD$.

Для определённости далее считаем, что P лежит между M и Q. Имеем $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - (\angle BPQ - \angle PQB)$. Так как $PQ \parallel CD$, то дуги PD и CQ равны, а значит, опирающиеся на них вписанные углы равны. Тогда $\angle BPQ - \angle PQB = \angle BDQ - \angle PCB = (\angle BDC - \angle QDC) - (\angle DCB - \angle DCP) = \angle BDC - \angle DCB = 90^\circ - \angle DCB = \angle CBD$, что завершает доказательство.

Замечание. Во второй части решения счёт углов можно провести разными способами. Попутно можно доказать, что H — это ортоцентр треугольника BPQ.

Комментарий. Доказано соотношение $MA^2 = MP \cdot MQ$ или, эквивалентно, подобие $AMP \sim QMA$ или, эквивалентно, найдена сумма $\angle MPA + \angle MQA = \angle CBD$ — 3 балла.

Проведён счёт углов, доказывающий равенство $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD$ или эквивалентное утверждение — 1 балл.