Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **13 февраля 2023 г.** (I тур) и **14 февраля 2023 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2022–2023 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geqslant 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бо́льшую первой.

Замечание. Можно показать, что $S_{m+1} > S_m$ только тогда, когда число $m+1$ является степенью некоторого простого числа p; в этом случае отношение S_{m+1}/S_m будет равно p.

Комментарий. Заявлено, что S_{m+1}/S_m не может делиться на квадрат простого числа, но это утверждение не доказано или доказано неверно — 1 балл.

11.7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника. (*Е. Молчанов*)

Ответ. Не всегда.

Решение. Возьмём прямоугольник размера 5×15, половина площади которого равняется $37,5$. Для того, чтобы условие выполнялось, из данного прямоугольника необходимо вырезать прямоугольник площади 37 или 38. Таких прямоугольников всего три: 1×37, 1×38 и 2×19. Заметим, что длинная сторона каждого из таких прямоугольников не меньше 19. С другой стороны, диагональ исходного прямоугольника равняется $\sqrt{250}$, но $\sqrt{250} < \sqrt{256} = 16 < 19$, поэтому ни один из таких прямоугольников вырезать из прямоугольника 5×15 нельзя.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верный пример вырезания без полного обоснования — не более 4 баллов.

Пример работает только в случае, когда прямоугольник вырезается по линиям сетки — не более 2 баллов.

11.8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. На биссектрисе угла ABC внутри треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD — точка E так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников AOE и COD соответственно. Докажите, что точки A, C, P и Q лежат на одной прямой или на одной окружности. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим вторую точку пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью, описанной около треугольника ABC, через F (см. рис. 5). Тогда точка F — середина дуги AC, поэтому OF — серединный перпендикуляр к хорде AC. Поскольку вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу, то $\angle FOC = 2\angle FBC$. С другой стороны, так как $BD = DC$, то $\angle DCB = \angle CBD$, а тогда $\angle CDF = \angle DCB + \angle DBC = 2\angle DBC = 2\angle FBC$ как внешний к треугольнику BCD. Таким образом, $\angle FOC = \angle FDC$, поэтому точка F лежит на окружности, описанной около треугольника COD. Рассуждая аналогично, мы получаем, что $\angle AOF = 2\angle ABF = \angle AEF$, и точка F лежит и на окружности, описанной около треугольника AOE. Значит, точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников AOF и COF, а эти треугольники симметричны относительно OF. Получается, что точки P и Q также симметричны относительно OF. Следовательно, либо точки P и Q лежат на прямой AC, либо P, Q, A, C — вершины равнобокой трапеции, а потому лежат на одной окружности.

Комментарий. Построена середина меньшей дуги AC окружности ABC (в решении названа F) — 0 баллов.

Доказано, что F лежит на одной из окружностей, описанных около треугольников AOE и COD — 3 балла.

Доказано, что точка F лежит на обеих окружностях — 4 балла.

Доказано, что радиусы окружностей равны — 1 балл.

Доказано, что точки P и Q симметричны относительно се-

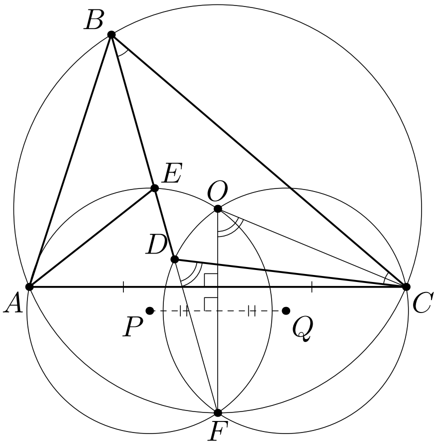

Рис. 5

рединного перпендикуляра к AC, далее упущен случай, когда они лежат на прямой AC — баллы не снимаются.

Баллы за указанные продвижения не суммируются.

11.9. Даны ненулевые числа a, b, c. Докажите, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right|+|bc+1|>1.$$

(*А. Кузнецов*)

Решение. Положим $d=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$. Теперь заметим, что

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right|+|bc+1|=|bd+1|+|cd+1|+|bc+1|.$$

Если $d=0$, то два из этих слагаемых равны 1, и тем самым сумма не меньше, чем 2. В противном случае числа a, b, d отличны от нуля. Значит, какие-то два из них одного знака, а тогда их произведение положительно, и соответствующее слагаемое больше 1. Поскольку два других слагаемых неотрицательные, то общая сумма больше 1.

Комментарий. Доказано нестрогое неравенство вместо строгого — снимается 1 балл.

Не разобран случай $d=0$ — снимается 1 балл.

11.10. В стране $2n$ городов (n — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на k межобластных и m внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geqslant n$. (*М. Дидин*)

Решение. Докажем индукцией по n, что в любом связном графе, содержащем $2n$ вершин, их можно покрасить в красный и синий цвета таким образом, что число рёбер с разноцветными концами (будем называть такие рёбра *разноцветными*) будет превосходить число рёбер с одноцветными концами (будем называть такие рёбра *одноцветными*) хотя бы на n — из этого будет следовать утверждение задачи. База $n = 1$ тривиальна, докажем переход.

Предположим, в графе с $2n$ вершинами найдётся пара вершин, соединённых ребром, при удалении которых граф не теряет связность; обозначим эти вершины через u и v. Покрасим оставшиеся вершины таким образом, чтобы число разноцветных рёбер было хотя бы на $n-1$ больше числа одноцветных рёбер — так можно сделать по предположению индукции. Заметим, что вершины u и v теперь можно покрасить таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных рёбер увеличится. В самом деле, без ограничения общности будем считать, что если вершины u и v не имеют обе чётные степени, то вершина u имеет нечётную степень. Тогда покрасим вершину u в цвет, который имеет меньшинство её соседей (в случае равенства покрасим в любой цвет), а затем покрасим таким же образом вершину v. Очевидно, при каждой покраске требуемая разность не уменьшилась, и хотя бы при одной покраске у соответствующей вершины было нечётное число покрашенных соседей, то есть разность при этой покраске увеличилась. Поскольку до покраски вершин u и v разность между числом разноцветных рёбер и числом одноцветных рёбер была не меньше $n-1$, после этой покраски она стала не меньше n.

С другой стороны, если в графе найдётся пара висячих вершин, то, очевидно, при их удалении граф по-прежнему не теряет связность, и тем же самым алгоритмом можно покрасить весь остальной граф, а затем и эти висячие вершины, таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных рёбер будет не меньше n. Докажем, что в любом связном графе хотя бы с тремя вершинами или найдутся две смежные вершины, при удалении которых граф останется связным, или найдутся две висячие вершины.

В самом деле, рассмотрим произвольное остовное дерево этого графа и подвесим его за любую не висячую вершину. Пусть v — наиболее удалённая от корня висячая вершина этого дерева, а u — предок этой вершины. Обозначим потомков этого предка через $v_1, \ldots, v_k$. Заметим, что вершины $v_1, \ldots, v_k$ являются висячими в рассматриваемом остовном дереве. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть пара вершин, соединённых ребром в исходном графе. Тогда при удалении этих двух вершин остовное дерево (а значит, и сам исходный граф) сохраняет связность.

Случай 2. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть пара вершин, являющихся висячими в исходном графе. Значит, в исходном графе есть хотя бы две висячие вершины.

Случай 3. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть не больше одной вершины, являющейся висячей в исходном графе. Без ограничения общности, будем считать, что если такая вершина есть, то это вершина v_1. Тогда переподвесим каждую из вершин $v_2, \ldots, v_k$ к любому из её соседей, отличных от u: поскольку эти вершины не являются висячими в исходном графе, такой сосед всегда найдётся. После всех переподвешиваний вершины u и v_1 можно будет удалить из графа, и остовное дерево останется связным — а значит, и сам граф.

Поскольку хотя бы один из случаев имеет место, и в каждом из них в графе есть или пара смежных вершин, при удалении которых граф остаётся связным, или пара висячих вершин, переход индукции доказан.

Замечание. Неравенство из задачи является точным: в частности, в полном графе на $2n$ вершинах соответствующая разность не может быть строго больше n.

Комментарий. Решение сведено к доказательству утверждения о том, что в любом связном графе хотя бы с тремя вершинами или найдутся две смежные вершины, при удалении которых граф остаётся связным, или найдутся две висячие вершины — 3 балла.