Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **13 февраля 2023 г.** (I тур) и **14 февраля 2023 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2022–2023 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Велодорожка состоит из двух участков: сначала идёт асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени? (*И. Богданов*)

Ответ. Они затратили поровну времени.

Первое решение. Между двумя моментами встречи каждый мальчик проехал половину асфальтового и половину песчаного участков, и они затратили на это поровну времени. Значит, на всю дорожку каждый из них затратил вдвое больше времени, то есть тоже поровну.

Второе решение. Нарисуем графики движения мальчиков по дорожке: на горизонтальной оси отмечаем время t, на вертикальной — положение y мальчика, считая от начала дорожки.

Пусть P_0, P_1, P_2 — точки, соответствующие старту Пети, моменту, когда он перешёл с асфальтового участка на песчаный, и его финишу; пусть V_0, V_1, V_2 — аналогичные точки для Васи. Тогда графики движения мальчиков — это ломаные $P_0P_1P_2$ и $V_0V_1V_2$, при этом отрезки P_0V_0, P_1V_1 и P_2V_2 горизонтальны (см. рис. 1). По условию, середины отрезков P_0P_1 и V_0V_1 совпадают, откуда $P_0V_0P_1V_1$ — параллелограмм. Аналогично, $P_1V_1P_2V_2$ — параллелограмм. Значит, отрезки P_0V_0, V_1P_1 и P_2V_2 параллельны и равны. Поэтому между моментами финиша Пети и Васи прошло столько же времени, сколько и между моментами их старта; отсюда и следует ответ.

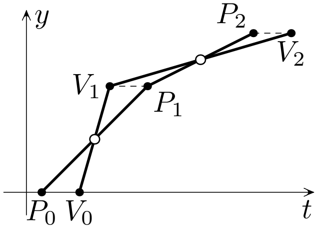

Рис. 1

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ, подтверждённый вычислениями в каких-то конкретных частных случаях — 1 балл.

9.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

(*Д. Храмцов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Многоугольник, у которого площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см), назовём *хорошим.*

Заметим, что исходный треугольник — хороший: он прямоугольный с катетами 5 см и 12 см, поэтому его площадь равна 30 см^2 и численно совпадает с его периметром, равным $5 + 12 + 13 = 30$ см.

Если какой-то многоугольник П разбит на хорошие многоугольники, то площадь П, равная сумме площадей всех многоугольников разбиения, совпала бы численно с суммой периметров многоугольников разбиения. Но сумма этих периметров больше периметра П (на удвоенную сумму длин общих частей границ многоугольников разбиения). Получаем, что площадь П больше его периметра.

Значит, никакой хороший многоугольник, в том числе данный треугольник, нельзя разрезать на несколько (больше одного) хороших многоугольников.

Комментарий. Только замечено, что исходный треугольник хороший — 1 балл.

Показано только, что хороший многоугольник не разбивается на хорошие — 5 баллов.

9.3. Дано натуральное число n. На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставили $2n$ ладей так, что никакие две не стоят в одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связных части, симметричных друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется *связной*, если по этой фигуре от любой её клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. $2n - 1$.

Решение. Заметим, что в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит ровно по одной ладье.

Покажем сначала, что все $2n$ ладей не могли попасть в одну часть. Пусть A, B, C, D — угловые клетки доски (в порядке обхода против часовой стрелки, см. рис. 2). Из симметрии, A и C должны принадлежать разным частям, как и B и D. Это значит, что либо A и B, либо A и D лежат в одной части, а остальные две клетки — в другой.

Пусть для определённости A и B лежат в части I. Тогда все граничные клетки между ними также должны лежать в части I; действительно, если какая-то такая клетка X лежит в части II, то в ней же лежит какой-то путь из X в C, а в части I лежит какой-то путь из A в B; но эти пути должны иметь общую клетку, что невозможно.

Значит, вся горизонталь между клетками A и B лежит в части I, то есть в ней должна быть хотя бы одна ладья. Аналогично, в части II тоже есть целая горизонталь (между C и D), а значит, есть ладья. Отсюда и следует требуемое.

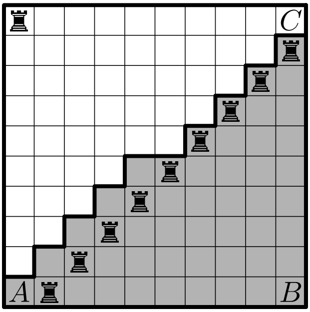

Рис. 2

Осталось привести пример, когда в одной из частей расположено $2n - 1$ ладей. Один из возможных примеров устроен так. Рассмотрим диагональ квадрата; в одну часть попадут клетки ниже неё, а также нижняя половина самой диагонали; остальные клетки попадут во вторую часть. Расставим $2n - 1$ ладью в клетки непосредственно под диагональю; тогда они окажутся в одной части. Оставшуюся ладью поставим в пересечение оставшихся строки и столбца. На рис. 2 указан такой пример при $n = 5$.

Замечание. Ключевым соображением в оценке является следующее: *Если на границе выбраны четыре клетки P, Q, R,*

S, обозначенные в порядке обхода, то любой путь между P и R имеет общую клетку с любым путём между Q и S.

С использованием этого утверждения оценку можно провести по-разному. Например, из симметрии, есть $4n$ граничных отрезков доски, принадлежащих одной части, и $4n$ принадлежащих другой. Из соображения выше, каждые $4n$ отрезков образуют группу подряд идущих; значит, среди них есть все отрезки какой-то стороны, и мы опять получаем, что в каждой части есть одна из граничных линий (вертикаль или горизонталь).

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример, когда $2n-1$ ладья находятся в одной части — 2 балла.

Только оценка, доказывающая, что $2n$ ладей в одной части быть не может — 5 баллов.

Соображение, выделенное курсивом в комментарии выше, принимается без доказательства.

9.4. Даны натуральные числа a, b и c. Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc+1$ делится на $ab-b+1$. Докажите, что $c \geqslant b$. (*М. Антипов*)

Первое решение. Предположим противное: пусть $b \geqslant c+1$. Из делимости $abc+1$ на $ab-b+1$ следует, что число $b(ac-a+1) = (abc+1)-(ab-b+1)$ кратно $ab-b+1$. Поскольку числа b и $ab-b+1 = b(a-1)+1$ взаимно просты, получаем, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$. Ясно, что $ac-a+1 > 0$, поэтому либо $ac-a+1 = ab-b+1$, либо $ac-a+1 \geqslant 2(ab-b+1)$.

В первом случае получаем $b = a(b-c+1)$ и, значит, b делится на a, что невозможно по условию. Во втором случае имеем

$$ac-a \geqslant 2b(a-1)+1 > 2b(a-1) > 2c(a-1),$$

то есть $ac < 2c-a < 2c$. Это значит, что $a < 2$, то есть $a = 1$; но это также невозможно по условию, ибо тогда снова b делится на a.

Второе решение. Опять же предположим противное. Поскольку $abc+1$ делится на $ab-b+1$, то и $bc-c+1 = (abc+1)-c(ab-b+1)$ тоже кратно $ab-b+1$, то есть $bc-c+1 = k(ab-b+1)$ при некотором натуральном k. Иначе говоря,

$$0 = (bc-c+1)-k(ab-b+1) = b(c-ka+k)-(k+c-1). \quad (*)$$

Значит, $k + c - 1$ делится на b.

По нашему предположению, $c < b$. С другой стороны, поскольку $a > 1$ (иначе b делится на a), имеем

$$bc - c + 1 = c(b-1) + 1 < b^2 < b(b+1) \leqslant b(b(a-1)+1),$$

откуда $k < b$. Значит, $0 < k + c - 1 < 2b$, и потому $k + c - 1 = b$.

Теперь $(*)$ переписывается в виде $0 = b(c - ka + k) - b$, то есть $c - ka + k - 1 = 0$. Но тогда $ka = k + c - 1 = b$, то есть b делится на a. Это невозможно.

Комментарий. Доказано, что $ac-a+1$ или $bc-c+1$ делится на $ab - b + 1$ — 2 балла.

9.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность γ. Оказалось, что окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются друг друга внешним образом в точке S. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что перпендикуляр ℓ к прямой MN, восставленный в точке M, пересекает прямую CS в точке, лежащей на γ.

(*И. Почепцов, Д. Бродский*)

Решение. Обозначим окружности с диаметрами AB и CD через ω_1 и ω_2 соответственно. Заметим, что точка S лежит на отрезке MN.

Пусть прямые CS и DS пересекают ℓ в точках P и Q соответственно (см. рис. 3). Поскольку CD — диаметр ω_2, имеем $\angle PSQ = \angle CSD = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике PSQ отрезок SM — высота, поэтому $\angle MSP = 90^\circ - \angle SPM = \angle SQP$. С другой стороны, поскольку $NS = NC$, имеем $\angle SCD = \angle CSN = \angle MSP$. Итак, $\angle SCD = \angle MSP = \angle SQP$, то есть точки P, Q, C и D лежат на одной окружности γ'.

Пусть теперь прямая MC пересекает окружности γ и γ' в точках X и X' соответственно (точка M лежит на отрезках CX и CX'). Тогда $MC \cdot MX = MA \cdot MB = MS^2$, поскольку M — центр окружности ω_1. С другой стороны, $MC \cdot MX' = MP \cdot MQ = MS^2$; последнее равенство опять же вытекает из того, что SM — высота в прямоугольном треугольнике PSQ. Значит, $MC \cdot MX = MS^2 = MC \cdot MX'$, то есть $X = X'$. Но точка X отлична от C и D, так как M не лежит на CD; значит, окружности γ и γ' имеют три общих точки C, D, X, то есть они совпадают. Поэтому P лежит на γ, что и требовалось доказать.

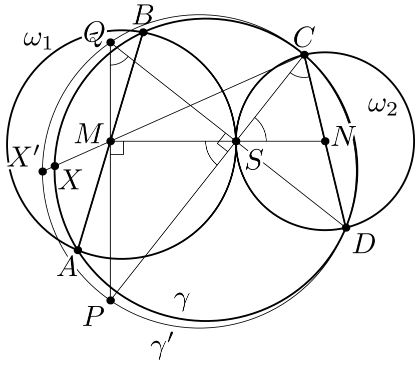

Рис. 3

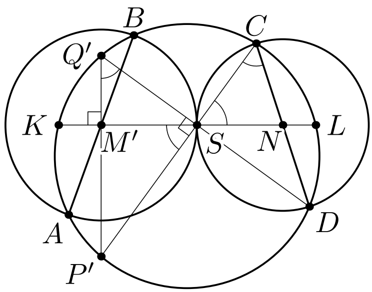

Рис. 4

Замечание 1. Решение можно было бы завершить многими разными способами. Например, равенства $MP \cdot MQ = MS^2 = MA \cdot MB$ означают, что точки P, Q, A и B лежат на одной окружности δ. Тогда либо окружности γ, γ' и δ совпадают, либо это три разных окружности. Во втором случае радикальные оси этих трёх окружностей должны пересекаться в одной точке или быть параллельными; но эти радикальные оси — это прямые PQ, AB и CD, и для них эти утверждения неверны.

Рассуждение выше имеет недостаток: оно не проходит в случае, когда точки P, Q, A и B лежат на одной прямой. Этот случай легко разобрать отдельно (тогда MN проходит через центр окружности γ, $AB \parallel CD$ и $AC \perp BD$).

Замечание 2. Существуют и другие решения, идейно схожие с приведённым выше. Например, можно рассуждать так.

Пусть лучи CS и DS пересекают γ повторно в точках P' и Q' (см. рис. 4). Пусть $M' = P'Q' \cap MN$. Тогда $\angle DQ'P' = \angle DCS = \angle CSN = \angle M'SP'$, откуда $MN \perp P'Q'$. Тогда SM' — высота в прямоугольном треугольнике, и $M'P' \cdot M'Q' = M'S^2$. С другой стороны, если прямая MN пересекает γ в точках K и L, то $M'K \cdot M'L = M'P' \cdot M'Q' = M'S^2$. Однако, как нетрудно проверить, на отрезке KL есть только две точки X такие, что $XK \cdot XL = XS^2$, и это точки $X = M$ и $X = N$. Значит, $M' = M$, что и требовалось доказать.

Комментарий. В целом верное решение не проходит для *вырожденных* случаев (как указано, например, в Замечании 1) — снимается 1 балл.