11 класс

Первый день

11.1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a, b, c таких, что a делится на $b+c$ и $b+c$ делится на $b-c+1$?

11.2. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=b$ имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)=b$.

11.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

11.4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1,2)$. Если на доске написана пара чисел (a,b), то на доску можно дописать пару $(-a,-b)$, а также пару $(-b,a+b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a,b) и (c,d), то на доску можно дописать пару $(a+c,b+d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022,2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1,2)$ и $(2,1)$ считаются различными.

11.5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, а также отмечен центр O его описанной окружности ω. Отрезки OH и AM пересекаются в точке D, прямые AB и CD — в точке E, прямые BD и AC — в точке F. Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y. Докажите, что прямые BY, CX и AH пересекаются в одной точке.