11 класс

Второй день

11.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

11.7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.

11.8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. На биссектрисе угла ABC внутри треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD — точка E так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников AOE и COD соответственно. Докажите, что точки A, C, P и Q лежат на одной прямой или на одной окружности.

11.9. Даны ненулевые числа a, b, c. Докажите, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right| + |bc + 1| > 1.$$

11.10. В стране $2n$ городов (n — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на k межобластных и m внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geqslant n$.