

7 класс Теоретический тур

Задача №7-Т1. В ванной

Пусть длинная сторона плитки имеет размер a , а короткая – b . Поскольку плитку резали только у стены с дверным проёмом, по рисунку можно найти соотношение между a и b . На 4 длинных стороны плитки приходится 10 коротких сторон (коврик перед унитазом может закрывать только одну целую плитку, поскольку его ширина равна $2b$). То есть

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Улитка из A до встречи должна пройти путь $3a$, улитка из B – путь $(a + 7b)$. Значит условие встречи можно записать в виде уравнения:

$$\frac{a + 7b}{u} - \frac{3a}{u} = \Delta t.$$

С учетом того, что $a = 2.5b$, получаем:

$$b = \frac{u\Delta t}{2} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{200}{60} \text{ см} = 20 \text{ см}. \quad a = 2.5b = 50 \text{ см}.$$

Теперь, зная размеры одной плитки, можно посчитать и площадь всей ванной комнаты, разбив её на простые части (например, на прямоугольники и прямоугольные треугольники с известными сторонами):

$$S = 4a(a + 9b) + 11ab + \frac{5}{2}ab = 4a^2 + 49.5ab = 5.95 \text{ м}^2.$$

PS: Разбиение на площади может быть и другим, соответственно формула может быть другой (например, $S = 59.5ab$). Но ответ, конечно, при этом измениться не должен.

Задача №7-Т2. Стадион МФТИ

Эффективная длина круга первой дорожка складывается из двух прямолинейных участков и двух дуг половинок окружностей.

$$L_1 = 2\pi R_1 + 2l \approx 400 \text{ м}.$$

Длины дорожек имеют различия только на криволинейных участках. Для первой и второй дорожек на трёх кругах разность длин:

$$\Delta l_{12} = 3(L_2 - L_1) = 3(2\pi(R_1 + d) - 2\pi R_1) = 6\pi d \approx 23 \text{ м}.$$

Легко заметить, что:

$$\Delta l_{12} = \Delta l_{23} = \Delta l_{34} = 6\pi d \approx 23 \text{ м.}$$

Для расчёта средней скорости на дистанции 2400 м нельзя точно определить время. Например, показание часов 13:00 может соответствовать любому моменту от 13:00:00 до 13:00:59:99... Тогда время забега атлета принадлежит интервалу от 12 до 14 минут. Эти границы позволяют найти наименьшее и наибольшее значения средней скорости.

$$v_{\min} = \frac{2400 \text{ м}}{14 \cdot 60 \text{ с}} \approx 2.86 \text{ м/с}, \quad v_{\min} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{14 \text{ ч}} \approx 10.3 \text{ км/ч};$$

$$v_{\max} = \frac{2400 \text{ м}}{12 \cdot 60 \text{ с}} \approx 3.33 \text{ м/с}; \quad v_{\max} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{12 \text{ ч}} \approx 12 \text{ км/ч.}$$

Задача №7-Т3. Шоколад и карамель

Запишем формулу средней плотности:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}.$$

Найдём массу шоколада $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \cdot 0.6V_1$, объём карамели $V_2 = \mu_2 t$, массу карамели $m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \mu t$.

После подстановки получим:

$$1.1\rho_1 = \frac{0.6\rho_1 V + \rho_2 \mu t}{0.6V + \mu t}.$$

Выразим и найдём время

$$t = \frac{0.6V \cdot 0.1V}{\mu(\rho_2 - 1.1\rho_1)} = 9.6 \text{ мин.}$$

Проверим возможность ответа:

$$V_2 = \mu t = 0.60 \frac{\text{л}}{\text{мин}} \cdot 9.6 \text{ мин} = 5.76 \text{ л} < 6.4 \text{ л} = 0.4V.$$

Т.е. карамель не выливалась!

Задача №7-Т4. Догонялки

Введём обозначения: T_1 — всё время в пути первого автомобиля, T_2 — всё время в пути второго автомобиля, τ_2 — время движения второго автомобиля до остановки. Согласно условию задачи:

$$T_1 = \tau_2 + \Delta t;$$

$$T_2 = t_2 = 14 \text{ мин.}$$

Из графика (точка излома): $\tau_2 = 2$ мин. В течении этого времени расстояние между автомобилями меняется с относительной скоростью $(v_1 - v_2)$. За 2 минуты оно станет равным (из графика) $S_1 = 1.2$ км. Получаем первое уравнение связи скоростей:

$$S_1 = (v_1 - v_2)\tau_2.$$

После этого из графика видно, что за следующие 2 минуты первый автомобиль уехал от стоящего второго ещё на

$$S_2 = 4.2 \text{ км} - 3.2 \text{ км} = 3 \text{ км.}$$

Это нам позволяет найти скорость первого автомобиля:

$$v_1 = \frac{3 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 1.5 \text{ км/мин.}$$

тогда из уравнения для связи скоростей можно найти скорость второго автомобиля:

$$v_2 = 1.5 \frac{\text{км}}{\text{мин.}} - \frac{1.2 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 0.9 \text{ км/мин.}$$

Теперь запишем формулы для расчёта пути из A в B :

$$L = v_1 T_1 = v_1(\tau_2 + \Delta t);$$

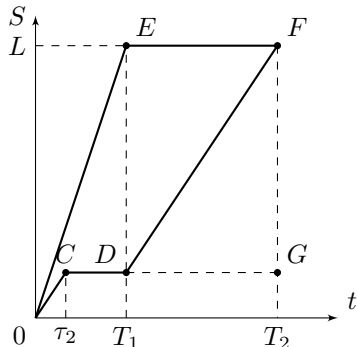
$$L = v_2(T_2 - \Delta t).$$

Приравняем правые части уравнений и найдём время остановки:

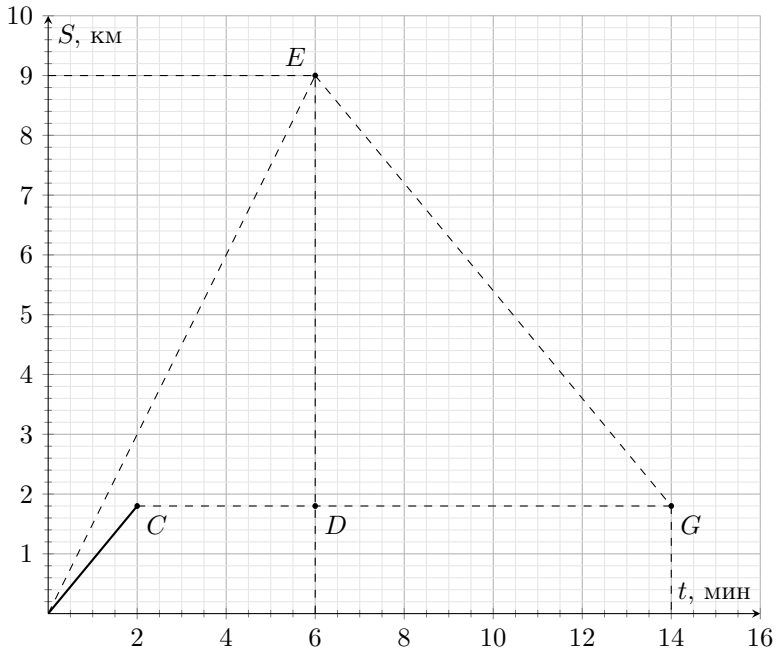
$$\Delta t = \frac{v_2 T_2 - v_1 T_1}{v_1 + v_2} = 4 \text{ мин.}$$

Также Δt можно найти графически. На рисунке качественно показан график движения автомобилей. Рассмотрим построение графика согласно условию задачи.

Известно, что первый автомобиль едет быстрее второго (угловой коэффициент прямой OE больше, чем у прямой OC) с постоянной скоростью v_1 вплоть до пункта B (точка E), а затем останавливается (участок EF). Второй автомобиль некоторое время движется с постоянной скоростью v_2 (участок OC), останавливается (участок CD), и когда первый автомобиль достигает пункта B , вновь продолжает движение (точка D) с той же скоростью v_2 (угловые



коэффициенты прямых OC и DF совпадают). В момент времени $t_2 = 14$ мин. автомобили поравнялись (точка F). Зная скорости автомобилей и время движения второго до остановки, можно определить положение точки G и провести через неё прямую GE с угловым коэффициентом $-v_2$ до пересечения с графиком движения первого автомобиля. На рисунке ниже показано это построение. Время остановки второго автомобиля 4 мин легко найти из построения.



Теперь можно найти длину пути:

$$L = v_2(T_2 - \Delta t) = 9 \text{ км.}$$

Если решать с использованием графика, то из построения также легко найти расстояние между пунктами A и B — 9 км.

Шифр

 Σ **7-Т1. В ванной**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Высказана идея воспользоваться для расчёта площади плитками, введены обозначения для длины и ширины плитки	1.0		
2	Определено соотношение a/b . Важно! Баллы по этому критерию даются ТОЛЬКО если для его вычисления бралось отношение числа коротких и длинных сторон плиток, приходящихся на ВСЮ ШИРИНУ комнаты ($10/4$), а не посчитанное на глазок в каком-то конкретном месте, например, по площади коврика. То есть, если в решении, например, сказано «по рисунку мы видим, что $a = 2,5b$ », баллы по этому критерию не ставятся, и, в то же время, если сказано «по рисунку мы видим, что $4a = 10b$ », то баллы ставить можно. Если за этот пункт участник получает 0 баллов, но отношение a/b найдено верно, то остальные пункты задачи оцениваются без штрафов.	3.0		
3	Путь улитки, стартовавшей из пункта A , выражен в размерах плитки.	1.0		
4	Путь улитки, стартовавшей из пункта B , выражен в размерах плитки.	1.0		
5	Верно записано уравнение для условия встречи улиток	2.0		
6	Найдена длина стороны плитки a	1.0		
7	Найдена длина стороны плитки b	1.0		
8	Высказана идея расчёта площади комнаты с помощью разбиения сложной фигуры на более простые, площадь которых легко считается (например, прямоугольники и прямоугольные треугольники).	1.0		
9	Написано уравнение для определения площади комнаты или верно найдено количество простых фигур, через которые определяется площадь комнаты.	1.0		
10	Верно найдена площадь ванной комнаты и указаны единицы измерения в ответе	3.0		

Шифр

 Σ **7-Т2. Стадион МФТИ**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записана верная формула для нахождения длины круга первой дорожки	1.0		
1.2	Найдена длина круга	1.0		
2.1	Есть понимание размера радиуса 2 дорожки $R_2 + d$	1.0		
2.2	Найдена разность длин двух соседних дорожек	1.0		
2.3	Показано что значения разностей длин у всех трёх пар дорожек равны	2.0		
3.1	Есть формула средней скорости	1.0		
3.2	Верно определена длина пути на 6 кругах	1.0		
3.3	Верно определено наибольшее время забега	1.0		
3.4	Найдена минимально возможная средняя скорость	1.0		
3.5	Верно выполнен перевод между значениями минимальной скорости для разных единиц измерения	1.0		
3.6	Верно определено наименьшее время забега	1.0		
3.7	Найдена максимально возможная скорость	1.0		
3.8	Верно выполнен перевод между значениями максимальной скорости для разных единиц измерения	1.0		
3.9	Указано, что значение средней скорости любое из интервала	1.0		

Шифр

 Σ **7-Т3. Шоколад и карамель**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Записана формула средней плотности	2.0		
2	Записана формула для массы шоколада через объём сосуда или найдена масса шоколада	2.0		
3	Записана формула для объёма карамели через массовый расход и время или найден объём карамели	2.0		
4	Записана формула для массы карамели через массовый расход и время или найдена масса карамели карамели	2.0		
5	Записана формула для расчёта времени (при решении по действиям формулы в работе может не быть, но при отсутствии ошибок в промежуточных вычислениях и верном ответе баллы за этот пункт ставятся)	3.0		
6	Найдено время в минутах. — Если ответ в секундах (576 с), то ставится 1 балл. — Если в ответе нет единиц измерения, то 0 баллов	2.0 1.0 0.0		
7	Проведена проверка возможности ответа	2.0		

Шифр

 Σ **7-Т4. Догонялки**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Указано, что излом графика произошёл в момент остановки второго автомобиля	1.0		
1.2	Указано, что коэффициент угла наклона графика на втором участке - скорость второго автомобиля	1.0		
1.3	Указано, что коэффициент угла наклона графика на первом участке - скорость $(v_1 - v_2)$	1.0		
1.4	Найден коэффициент угла наклона графика на первом участке	1.0		
1.5	Найден коэффициент угла наклона графика на втором участке	1.0		
1.6	Найдена скорость v_1 (ответ + единицы измерения)	1.0		
1.7	Найдена скорость v_2 (ответ + единицы измерения)	1.0		
2.1	Метод 1. Записано уравнение, связывающее время в пути первого автомобиля с его скоростью и L . В работе должно быть обозначено, какие моменты времени обозначают введенные неизвестные переменные.	1.0		
2.2	Метод 1. Записано уравнение, связывающее время в пути второго автомобиля с его скоростью и L . В работе должно быть обозначено, какие моменты времени обозначают введенные неизвестные переменные.	1.0		
2.3	Метод 1. Получено уравнение с одной неизвестной, для нахождения времени, например: $v_2(T_2 - \Delta t) = v_1(\tau_2 + \Delta t)$. ($\tau_2 = 2$ мин.; $T_2 = 14$ мин.)	2.0		
2.4	Метод 1. Найдено время остановки второго автомобиля	1.0		
2.5	Метод 1. Верно указаны единицы измерения для времени остановки второго автомобиля	1.0		
2.6°	Метод 2. Есть объяснение к графическому решению	1.0		
2.7°	Метод 2. Выполнено верное построение	2.0		

2.8°	Метод 2. Выбран хороший масштаб, обозначены и подписаны оси, указаны единицы измерения	1.0		
2.9°	Метод 2. Найдено время остановки второго автомобиля	2.0		
3.1	Ответ для L	1.0		
3.2	Верно указаны единицы измерения	1.0		