8 класс

Теоретический тур

Задача №8-Т1. По трубе

Перейдём в систему отсчёта, связанную с трубой. Скорость левого шарика будет равна $1.1V$. С учётом этого находим $\tau_1 = \dfrac{L}{1.1V} = \dfrac{10L}{11V}$.

Скорость правого шарика в системе отсчёта, связанной с трубой $1.9V$. Откуда $\tau_2 = \dfrac{L}{1.9V} = \dfrac{10L}{19V}$.

После соударения с торцевыми стенками трубы скорости шариков останутся такими же по модулю. К моменту времени τ левый шарик пройдет путь $L + l_1 = 1.1V\tau$. Путь, пройденный вторым шариком, к этому моменту равен $L + l_2 = 1.9V\tau$, причём $l_1 + l_2 = 2L$.

Из записанных соотношений определим время $\tau = \dfrac{4L}{3V}$.

Вернёмся в неподвижную систему отсчёта. Скорость левого шарика в ней будет равна $1.1V + 0.1V = 1.2V$, скорость правого шарика будет равна $1.9V - 0.1V = 1.8V$.

Таким образом $u_1 = 1.2V$, $u_2 = 1.8V$.

Задача №8-Т2. Изогнутая трубка

Согласно условию: $p_0 = \rho g 10h = 10\rho gh$. Полное давление в жидкости: $p = p_{\text{внешнее}} + p_{\text{гидростатическое}}$. Пройдём по трубке от левой свободной поверхности к правой:

$$0.8p_0 + 4\rho g2h – \rho g3h + k\rho g4h – 3\rho g3h = p_0.$$

С учётом первого уравнения получаем $k = 1.5$.

Т.к. давление на левый свободный уровень увеличится, то он опустится. Значит правый свободный уровень поднимется на ту же величину. Если считать смещение равным s, то

$$p_0 + 4\rho g(2h – 2s) – \rho g(3h – 2s) + 1.5\rho g4h – 3\rho g(3h + 2s) = p_0.$$

Отсюда $s = h/6$.

Задача №8-Т3. Туда-сюда

С учётом того, что теплопотерями и теплоёмкостью кастрюли можно пренебречь, мощность плитки можно определить как $N = cm\Delta t/\Delta\tau$, где c — удельная теплоёмкость воды, m — масса воды (объёмом 5 литров, $m = \rho V = 5$ кг), Δt — изменение температуры, $\Delta\tau$ — время, за которое это изменение произошло.

Так как в период с момента времени τ_1 до момента времени τ_2 масса воды в кастрюле равна m, температура изменилась с t_1 до t_2, то $N = \frac{cm(t_2-t_1)}{\tau_2-\tau_1} = 1.75$ кДж.

Если по ходу нагрева масса воды в кастрюле не меняется, то не меняется скорость нагрева $\Delta t/\Delta\tau = 5$ °C/мин. Значит конечная температура равна $t_к = t_0 + 10\tau_0\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = 70$ °C ($\tau_0 = 1$ мин).

Пусть масса добавляемой воды в процессе эксперимента Δm. К моменту времени $8\tau_0$ нагреватель выделит количество теплоты $N8\tau_0$. Оно равно сумме количества теплоты $cm(t_{45} - t_0)$, полученного водой массой m (оставшейся в сосуде после выливания) и количества теплоты $c\Delta m(t_x - t_0)$, полученного водой массой Δm. Т.е.

$$8N\tau_0 = cm(t_{45} - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0),$$

где $t_{45} = 45$ °C, t_x — температура воды в момент её забора. Причём $t_x < t_{45}$.

С учётом этого и вышеприведенных уравнений получаем

$$\Delta m = \frac{m}{t_x - t_0}\left(8\tau_0\frac{t_2 - t_1}{\tau_2 - \tau_1} - t_{45} + t_0\right).$$

Из данного соотношения видно, что Δm принимает минимальное значение при максимально возможном значении $t_x = 45$°C. Откуда $m_{\min} = 3$ кг.

Пусть τ — время, когда происходил забор воды из кастрюли. Исходя из того, что объём кастрюли 10 л, максимальная масса добавляемой воды может быть равна $m = 5$ кг.

Тепло, выделившееся на нагревателе к моменту времени τ:

$$N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0).$$

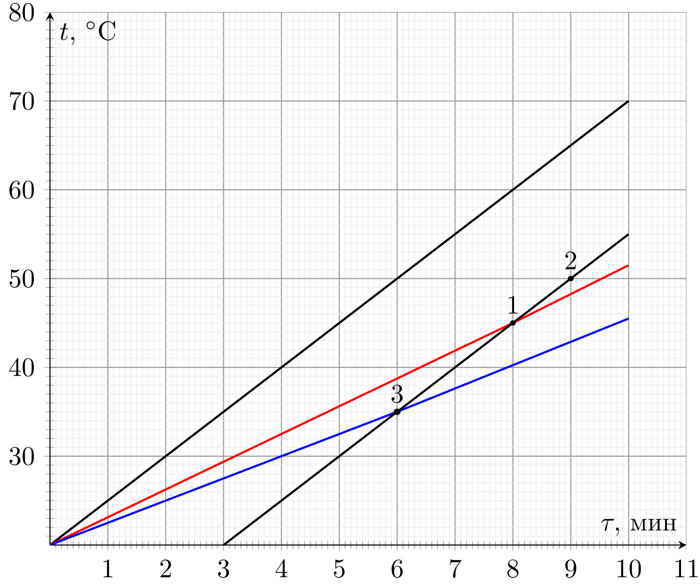
С учётом этого и соотношений для мощности плитки, выделяемой за время $8\tau_0$ получаем:

$$\tau = \frac{c(m + \Delta m)}{N}\frac{8N\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{c\Delta m} = \left(\frac{m}{\Delta m} + 1\right)\cdot\frac{8\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{N}.$$

Откуда видно, что $\tau = \tau_{\min} = 6$ мин. при $\Delta m = \Delta m_{\max} = m$.

Также можно решать эту решать задачу графически в системе координат «время-температура». График процесса нагрева в этих координатах будет состоять из трех отрезков прямых: первый — до долива (масса воды в кастрюле $m = 5$ кг), второй — после долива (масса воды в кастрюле $m + \Delta m$) и третий — после забора воды (масса воды в кастрюле m).

Возьмем известные нам точки 1 и 2 и проведем через них прямую. На этой прямой лежит отрезок графика, соответствующий третьему участку. Учитывая, что масса воды на третьем и первом участке одинакова, прямые, на которых



они лежат, должны быть параллельны, так как мощность нагрева постоянна. Проведем прямую, параллельную нашей и проходящую через начало координат (время — 0 мин, температура — 20 °C). Именно на этой прямой лежит график первого участка. По ней также можно определить температуру $t_к$, которую имела бы вода в кастрюле, если бы её масса не менялась со временем. Температура, соответствующая 10 минутам и есть искомая $t_к = 70$ °C.

По наклону этой прямой можно также определить мощность плитки $N = \frac{cm\Delta t}{\Delta\tau} = 1.75$ кВт.

Когда в кастрюлю доливают воду, масса в ней увеличивается, а температура уменьшается. Поскольку изменение температуры происходит мгновенно, график перескакивает на прямую, имеющую наклон, соответствующий новой массе, и проходящую через начало координат. Чем масса больше, тем более полого пойдет прямая. А её пересечение с прямой третьего участка даст момент забора воды.

Поскольку кастрюля десятилитровая, больше 5 литров долить в неё невозможно. Этому случаю соответствует нижняя (голубая) прямая. Именно она пересекается с прямой третьего участка раньше любой другой возможной (в точке 3, соответствующей $\tau_{\min} = 6$ минут).

В то же время, второй участок не может пересечься с третьим позже точки 1, которой соответствует минимальная добавочная масса $m_{\min} = 3$ кг.

Задача №8-Т4. Ползущий рельс

Для начала определимся с тем, как будут меняться во времени силы реакции опор (которые численно равны показаниям динамометров). Очевидно, что центр масс рельса на старте находится между опорами. Пусть x — это расстояние от левой опоры до центра масс в начальный момент времени, F_1 и F_2 — показания левого и правого динамометров соответственно. Тогда через время t получим:

$$F_1 l = Mg(l - x - vt);$$

$$F_2 l = Mg(x + vt).$$

Откуда:

$$F_1(t) = Mg - \frac{Mgx}{l} - \frac{Mgv}{l}t;$$

$$F_2(t) = \frac{Mgx}{l} + \frac{Mgv}{l}t.$$

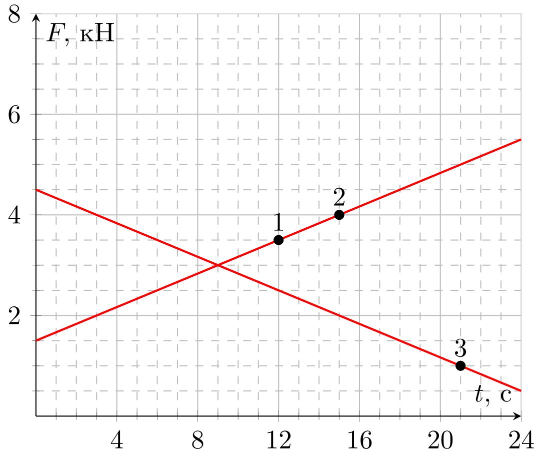
Видно, что в обоих случаях зависимость линейная. В первом — убывающая, а во втором — возрастающая, причем коэффициенты при t отличаются только знаком. Кроме того, в любой момент времени $F_1 + F_2 = Mg$.

Очевидно, что из трех точек какие-то 2 принадлежат одному графику, а оставшаяся — другому. Возможны три варианта. Однако точки 2 и 3, также как точки 1 и 3 не могут лежать на одной прямой. В этом случае второй график пересечет ось X позже, чем начнется движение (а такого быть не может — рельс бы опрокинулся еще до старта).

Покажем это аналитически. Предположим, что точки 2 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -0.5\frac{\text{Н}}{\text{с}}t + 11{,}5$ Н. В момент времени $t_1 = 12$ с из графика находим $F_2(t_1) = 3{,}5$ Н, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_1) = 5{,}5$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ с находим $F_1(t_0) = 11{,}5$ Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -2{,}5$ Н < 0. Значит, наше предположение неверно.

Предположим теперь, что точки 1 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -\frac{5}{18}\frac{\text{Н}}{\text{с}}t + \frac{41}{6}$Н. В момент времени $t_2 = 15$ с из графика находим $F_2(t_2) = 4$ Н, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_2) = \frac{8}{3}$ Н $\approx 2{,}67$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ с находим $F_1(t_0)\frac{41}{6}$ Н $\approx 6{,}83$ Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -\frac{1}{6}$ Н $\approx -0{,}17$ Н < 0. Следовательно, это предположение тоже неверно.

Значит, одному графику принадлежат точки 1 и 2. Тогда графики должны выглядеть так:



Сразу оговоримся, что поведение графиков нам точно известно только до 21-й секунды. Время движения рельса будет зависеть от его длины.

По графикам не сложно определить, что $Mg = 6$ кН. Откуда $M = 600$ кг. Если мысленно продлить графики до пересечения с осью X, то можно заметить, что расстояние l рельс проехал бы за 36 секунд. Значит его скорость — 0.25 м/с.

Что же касается минимальной длины рельса, то при её оценке мы можем отталкиваться только от известных нам крайних положений. В начальный момент времени расстояние от центра масс до дальней (правой) опоры — 6.75 м. А в последний доподлинно известный нам момент (точка 3) расстояние от центра масс до дальней (левой) опоры — 7.5 м. Откуда можно сделать вывод, что длина рельса не меньше $L_{\min} = 15$ м.

Шифр

$\sum$

8-Т1. По трубе

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Определена начальная скорость левого шарика относительно трубы $1{,}1V$.	1.0		
1.2	Определено время $\tau_1 = \frac{10L}{11V}$.	1.0		
2.1	Определена начальная скорость правого шарика относительно трубы $1{,}9V$.	1.0		
2.2	Определено время $\tau_2 = \frac{10L}{19V}$.	1.0		
3.1	Записано уравнение, равносильное уравнению $L + l_1 = 1.1V\tau$.	2.0		
3.2	Записано уравнение, равносильное уравнению $L + l_2 = 1.9V\tau$.	2.0		
3.3	Записано уравнение, равносильное уравнению $l_1 + l_2 = 2L$.	2.0		
3.4	Найдено время $\tau = \frac{4L}{3V}$. Ответ без приведённого правильного решения не засчитывается.	1.0		
4.1	Найдена скорость $u_1 = 1{,}2V$.	2.0		
4.2	Найдена скорость $u_2 = 1{,}8V$.	2.0		

Шифр

$\sum$

8-Т2. Изогнутая трубка

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записана величина атмосферного давления через плотность жидкости $p_0 = 10\rho g h$	1.0		
1.2	Учтено, что гидростатическое давление в жидкости суммируется с внешним	2.0		
1.3	Записано верное равенство давлений, обеспечивающее равновесие в трубке при наличии пробки	3.0		
1.4	Найдено значение $x = 1.5$	2.0		
2.1	Обосновано направление смещения жидкостей	1.0		
2.2	Указано верное направление смещения	1.0		
2.3	Записано верное равенство давлений, обеспечивающее равновесие в трубке без пробки	3.0		
2.4	Найдена величина смещения $s = h/6$	2.0		

Шифр

$\sum$	

8-Т3. Туда-сюда

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	**Метод 1.** Указано, что если масса воды не изменяется, то скорость нагрева равна $\Delta t/\Delta\tau = 5°$С/мин.	1.0		
1.2	**Метод 1.** Записано соотношение для определения конечной температуры $t_к = t_0 + 10\tau_0\frac{\Delta t}{\Delta\tau}$.	1.0		
1.3°	**Метод 2.** Высказана идея графического похода к решению задачи.	2.0		
1.4°	**Метод 2.** Правильно выбраны оси, нанесены точки 1 и 2, соблюдены требования к оформлению графиков.	3.0		
1.5	Определена конечная температура $t_к = 70°$С.	2.0		
2.1	**Метод 1.** Записано выражение для мощности $N = \frac{cm(t_2-t_1)}{\tau_2-\tau_1}$.	1.0		
2.2	**Метод 1.** Записано соотношение $8N\tau_0 = cm(t_{45} - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0)$.	2.0		
2.3	**Метод 1.** Указано, что $\Delta m = m_{min}$ при $t_x = 45°$С	1.0		
2.4	**Метод 1.** Найдено значение m_{min}.	2.0		
2.5°	**Метод 2.** Обосновано поведение графика на втором участке, явно указано, что он будет лежать на прямой, проходящей через точку (0 мин.; 20°С).	2.0		
2.6°	**Метод 2.** Найдено значение m_{min}.	3.0		
3.1	**Метод 1.** $N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0)$.	2.0		
3.2	**Метод 1.** Учтено, что $m_{max} = m = 5$ кг.	1.0		
3.3	**Метод 1.** Найдено значение τ_{min}.	2.0		
3.4°	**Метод 2.** Найдено значение τ_{min}.	3.0		

Шифр

$\sum$

8-Т4. Ползущий рельс

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Верно записано уравнение моментов относительно оси, проходящей через левую опору (или эквивалентное уравнение)	2.0		
1.2	Верно записано уравнение моментов относительно оси, проходящей через правую опору (или эквивалентное уравнение)	2.0		
1.3	Получено выражение зависимости показаний левого динамометра от времени	1.0		
1.4	Получено выражение зависимости показаний правого динамометра от времени	1.0		
1.5	Обосновано, что одному графику не могут принадлежать точки $1-3$ и $2-3$	1.0		
1.6	Указано, что одному графику не могут принадлежать точки $1-3$ и $2-3$	1.0		
1.7	Верно построены все графики	1.0		
1.8	Определена масса M	1.0		
2.1	Определена скорость v	2.0		
3.1	Определены расстояния от центра масс до дальней опоры в начальный и последний доподлинно известный момент времени	1.0		
3.2	Указано, что в момент, соответствующий точке 3, центр масс рельса максимально удален от опоры	1.0		
3.3	Определено значение L_{min}	1.0		