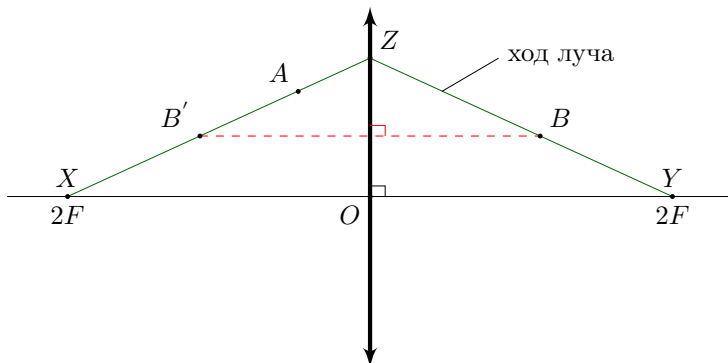


9 класс

Задача №9-Т1. Выцветшие фокусы линзы



Из рисунка видно, что линза собирающая, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{r},$$

где r — расстояние от изображения источника, которое находится тоже на главной оптической оси, до линзы.

Находим $r = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{2F}\right)^{-1} = 2F > 0$. Т.е. изображение находится на другой стороне от линзы на расстоянии $2F$ от неё — на том же расстоянии, что и источник.

Если X — источник, то Y — изображение источника. Если Y — источник, то X — его изображение.

$OX = OY \Rightarrow \triangle XYZ$ равнобедренный \Rightarrow точка B' , симметричная B относительно плоскости линзы, лежит на другой стороне $\triangle XYZ$ — стороне XZ .

Следовательно, следующий ряд построений отвечает на вопросы задачи:

1. Отражаем точку B относительно плоскости линзы и получаем точку B' (альтернативно можно так же поступить и с точкой A).
2. Проводим прямую AB' . Она пересекает главную оптическую ось в точке X . Получаем положение источника (или изображения) X на двойном фокусе.
3. Середина отрезка OX — первый фокус линзы.
4. Отражаем в плоскости линзы фокус, построенный в пункте 3 и получаем второй фокус.

Задача №9-Т2. Частицы в трубах

При движении от точки C до точки D между двумя встречами частица в кольцевой трубе совершает $N + \frac{1}{2}$ оборотов, где $N \geq 0$ — целое число. Это произошло за время

$$\Delta t = \frac{2\pi R(N + \frac{1}{2})}{v} = \frac{\pi R(2N + 1)}{v}.$$

Пусть $x(t)$ — расстояние от первой частицы до точки A в момент времени t , где $x(0) = 0$. Тогда $x(t) = \frac{at^2}{2}$ и $t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$. Длины отрезков $|AC| = \frac{L}{2} - R$ и $|AD| = \frac{L}{2} + R$. Время движения частицы №1 от точки C до точки D равно

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\sqrt{|AD|} - \sqrt{|AC|} \right) = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}$$

Получаем

$$\frac{\pi R(2N + 1)}{v} = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}.$$

Откуда

$$v = \frac{\pi R(2N + 1)\sqrt{a}}{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}} = \frac{\pi(2N + 1)(\sqrt{L + 2R} + \sqrt{L - 2R})\sqrt{a}}{4}$$

При $R = L/2$ имеем

$$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N + 1)\sqrt{a}$$

При $R \ll L$ получаем

$$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N + 1)\sqrt{a}$$

Задача №9-Т3. Гидростатический реостат

Перемещаясь, поршни задействуют разную длину проволок, соответственно, обеспечивают изменение сопротивления цепи. Это связано еще и с тем, что площади сосудов отличаются, иначе бы эффект не наблюдался. Дело в том, что при смещении большого поршня на Δh вниз, малый сместится на $3\Delta h$ вверх, и наоборот, когда большой поршень смещается на Δh вверх, малый сместится на $3\Delta h$ вниз.

Для удобства дальнейшей записи введем обозначение α для сопротивления одного метра проволоки. Тогда можно записать законы Ома для указанных в условии задачи положений поршней. Когда на поршнях нет грузов:

$$U = I_0(2\alpha h_0 + R_A),$$

когда груз на малом поршне:

$$U = I_1(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{2\rho S}),$$

когда груз на большом поршне:

$$U = I_2(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{2\rho S}).$$

Взяв разность двух последних уравнений, получаем

$$U(I_2 - I_1) = I_1 I_2 \frac{\alpha m}{\rho S}.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{U(I_2 - I_1)\rho S}{I_1 I_2 m} = 20 \text{ Ом/м.}$$

И, воспользовавшись первым законом Ома, получим ответ

$$R_A = \frac{U}{I_0 - 2\alpha H_0} = 1 \text{ Ом}$$

Из законов Ома для положений системы с грузами можно получить

$$U(I_1 + I_2) = 2I_1 I_2(2\alpha h_0 + R_A).$$

Учитывая закон Ома, когда нет поршней, получим

$$I_0 = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2.2 \text{ А}$$

Максимальный ток в цепи будет при минимальном сопротивлении, то есть, когда задействована минимальная длина проволок. Это произойдет в нижнем положении малого поршня:

$$I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 3.22 \text{ А.}$$

Минимальный ток напротив будет при максимальном сопротивлении, то есть, когда задействована наибольшая длина проволок. Это произойдет в верхнем положении малого поршня:

$$I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 1.67 \text{ А.}$$

Задача №9-Т4. Что так, что эдак

Ситуация, описанная в задаче, может произойти только при условии, что отлив воды в экспериментах происходит при одинаковой температуре. Действительно, при отливе вода забирает с собой часть тепла, переданного плиткой, равную $c\Delta m(t_x - t_0)$, где t_x — это температура, при которой воду выливают из кастрюли. А поскольку общее количество теплоты, переданное воде плиткой, в обоих случаях одинаково, то и t_x должно быть одинаковым. Найдем температуру, при которой происходит отлив воды во втором эксперименте:

$$t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 40 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Здесь и далее M — это масса воды в кастрюле в начале эксперимента (5 кг). Эту же температуру должна иметь вода в первом эксперименте через время $\tau_1 + \tau_2$ после его начала. Отсюда:

$$t_x = t_0 + \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(M + \Delta m)}.$$

Откуда

$$\Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M = 3 \text{ кг}.$$

Тогда конечная температура в каждом из экспериментов:

$$t_{\text{к}} = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM} = 48 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Причем, для первого случая эта температура одновременно является максимально возможной по ходу всего эксперимента (поскольку она больше t_x). Во втором случае максимального значения температура может достигать либо в конце эксперимента, либо непосредственно перед доливом воды (через $\tau_1 + \tau_2$ от начала нагрева). При проверке выясняется, что реализовался второй сценарий:

$$t_{\text{max}2} = t_x + \frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$$

Задача №9-Т5. Движение по спице

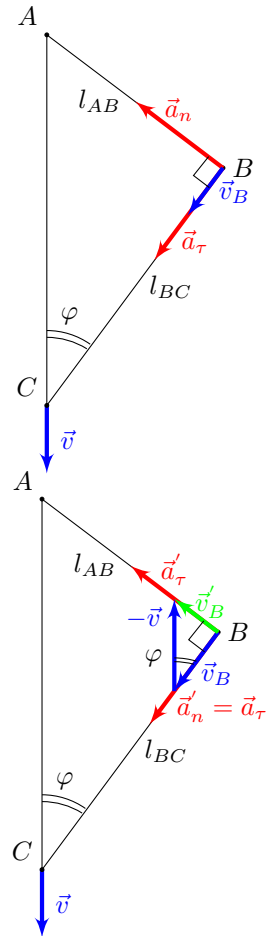
Так как точка A закреплена, а нить AB натянута, то точка B движется по окружности с центром в точке A и радиусом l_{AB} . Следовательно, её скорость в рассматриваемый момент перпендикулярна радиусу окружности, то есть нити AB , и поэтому направлена вдоль нити BC , перпендикулярной нити AB . Найти скорость точки B можно двумя способами.

Первый способ: поскольку нить BC нерастяжима и натянута, то проекции скоростей точек B и C на неё равны. Проекция скорости точки C на нить BC равна $v \cos \varphi$, так что $v_B = v \cos \varphi$.

Второй способ: перейдем в систему отсчета точки C , то есть в поступательно движущуюся систему отсчёта, в которой точка C покоится. Скорости \vec{v}_B и \vec{v}'_B точки B в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением $\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_C$, где \vec{v}_C — скорость точки C в исходной системе отсчёта. В новой системе отсчёта точка C покоится, нить BC натянута, так что точка B движется по окружности с центром в точке C и радиусом l_{BC} . При этом скорость точки B в новой системе отсчёта направлена перпендикулярно радиусу окружности — нити BC . Значит, скорости \vec{v}_B , $-\vec{v}$ и $\vec{v}_B - \vec{v} = \vec{v}'_B$ образуют прямоугольный треугольник с углом φ между \vec{v} и \vec{v}_B , в котором \vec{v} является гипотенузой. В таком случае $v_B = v \cos \varphi$.

$$v_B = v \cos \varphi = \frac{v\sqrt{3}}{2}$$

Теперь определим длину нити BC . Для этого перейдём в систему отсчёта точки C , в точности как в Варианте 2 в предыдущем пункте. Поскольку новая система отсчёта поступательно движется относительно исходной, то ускорения \vec{a}_B и \vec{a}'_B точки B в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением $\vec{a}_B = \vec{a}'_B + \vec{a}_C$, где \vec{a}_C — ускорение точки C в исходной системе отсчёта. Так как точка B движется по окружности с центром в точке C в новой системе отсчёта, то её ускорение складывается из тангенциального ускорения \vec{a}'_T , направленного вдоль нити AB , и ортогонального ему нормального ускорения \vec{a}'_n , направленного к точке C вдоль нити BC . По условию в исходный момент $\vec{a}_C = 0$, так что $\vec{a}_B = \vec{a}'_B$. Также дано, что ускорение точки B , направленное вдоль нити BC , равно a_T . Значит, нормальное ускорение точки B в новой системе отсчёта равно a_T . С другой стороны,



оно равно

$$\frac{(v'_B)^2}{l_{BC}} = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}},$$

где равенство $v'_B = v \sin \varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника, образованного скоростями \vec{v}_B , $-\vec{v}$ и \vec{v}'_B . Таким образом,

$$a_\tau = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}} \implies l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_\tau}.$$

$$l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_\tau} = \frac{v^2}{4a_\tau}$$

Определим полное ускорение точки B в исходной системе отсчёта. Поскольку в исходной системе отсчёта точка B движется по окружности с центром в точке A , то её полное ускорение складывается из двух ортогональных составляющих: тангенциального ускорения a_τ и нормального ускорения, направленного вдоль нити AB к точке A и равного

$$a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}} = \frac{v^2 \cos^2 \varphi}{l_{BC} \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{a_\tau \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi} = a_\tau \operatorname{ctg}^3 \varphi.$$

Равенство $l_{AB} = l_{BC} \cdot \operatorname{tg} \varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника ABC . Полное ускорение точки B находим по теореме Пифагора

$$a_B = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_\tau \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^6 \varphi} = 2\sqrt{7}a_\tau.$$

Шифр

 Σ **9-Т1. Выцветшие фокусы линзы**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Утверждение, что изображение также лежит на расстоянии двойного фокуса, в том числе использование формулы тонкой линзы или без доказательства.	3.0		
2	Утверждение, что луч распространяется симметрично плоскости линзы.	2.0		
3	Отражение точки A или точки B относительно главной плоскости линзы в точки A' или в B' соответственно.	2.0		
4	Построение хода луча $B'A$ или $A'B$ до пересечения с главной оптической осью и (но не обязательно) линзой.	2.0		
5	Утверждение, что точка пересечения построенного луча и главной оптической оси является изображением (или источником), находящимся на расстоянии двойного фокуса.	1.0		
6	Нахождение фокуса, как середины между точкой O и изображением или источником.	1.0		
7	Нахождение второго фокуса.	1.0		

Шифр

Σ

9-Т2. Частицы в трубах

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записано условие одинаковости времени движения обеих частиц от C до D .	1.0		
1.2	Выражены расстояния AC и AD через L и R .	1.0		
1.3	Верно выписано время движения частицы между встречами по прямой трубе.	1.0		
1.4	Найдено время движения частицы между встречами по кольцевой трубе.	2.0		
1.5	Верно найдена скорость частицы в общем виде	3.0		
	$v = \frac{\pi(2N + 1)(\sqrt{L + 2R} + \sqrt{L - 2R})\sqrt{a}}{4}$ <p>– Верно найдена скорость частицы в частном случае (без N)</p> $v = \frac{\pi(\sqrt{L + 2R} + \sqrt{L - 2R})\sqrt{a}}{4}$	2.0		
2.1	Верно найдена скорость частицы при $R = L/2$	2.0		
	$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N + 1)\sqrt{a}$ <p>– Верно найдена скорость частицы при $R = L/2$ в частном случае (без N)</p> $v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}\sqrt{a}$	1.0		
3.1	Верно найдена скорость частицы при $R \ll L$	2.0		
	$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N + 1)\sqrt{a}$ <p>– Верно найдена скорость частицы при $R \ll L$ в частном случае (без N)</p> $v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}\sqrt{a}$	1.0		

Шифр

 Σ **9-Т3. Гидростатический реостат**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Продемонстрировано понимание, что описанный эффект связан с изменением сопротивления задействованной части проволоки. Например, вводится понятие «сопротивление единицы длины» α , различные отношения сопротивлений проволоки при разных положениях поршней или эквивалентные рассуждения.	1.0		
1.2	Определена связь между смещениями поршней 1:3.	1.0		
1.3	Определено изменение задействованной длины проволоки при помещении груза на малый поршень: $-\frac{\alpha m}{2\rho S}$	0.5		
1.4	Определено изменение задействованной длины проволоки при помещении груза на малый поршень: $+\frac{\alpha m}{2\rho S}$	0.5		
1.5	Закон Ома для случая, когда грузов нет $U = I_0(2\alpha h_0 + R_A)$	1.0		
1.6	Закон Ома для случая, когда груз на малом поршне $U = I_1(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{2\rho S})$	1.0		
1.7	Закон Ома для случая, когда груз на большом поршне $U = I_1(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{2\rho S})$	1.0		
1.8	Определено сопротивление амперметра $R_A = \frac{U_0}{I_0} - 2\alpha h_0 = 1 \text{ Ом}$	1.0		
2.1	Определен ток $I_0 = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2.2 \text{ А}$	1.0		
3.1	Формула для определения $I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A}$	1.0		
3.2	Численное значение: $I_{\max} = 3.22 \text{ А}$	1.0		
3.3	Формула для определения $I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A}$	1.0		
3.4	Численное значение: $I_{\min} = 1.67 \text{ А}$	1.0		

Шифр

 Σ **9-Т4. Нагревание воды в кастрюле**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Аргументировано показано, что указанная ситуация возможна только когда отлив воды происходит при одинаковой температуре.	3.0		
1.2	Записано выражение для нахождения t_x в первом эксперименте $t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 40 \text{ }^\circ\text{C}$	1.0		
1.3	Записано выражение для нахождения t_x во втором эксперименте: $t_x = t_0 + \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(M + \Delta m)}$	1.0		
1.4	Верное аналитическое выражение $\Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M$	1.0		
1.5	Верное численное значение $\Delta m = 3 \text{ кг}$	1.0		
2.1	Записано уравнение, для нахождения $t_k = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM}$	1.0		
2.2	Верное численное значение $t_k = 48 \text{ }^\circ\text{C}$	1.0		
3.1	Указано, что в процессе второго эксперимента температура может достичь большего значения, чем конечная.	1.0		
3.2	Записано уравнение, для нахождения максимального значения температуры $t_{\max 2} = t_x + \frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)}$	1.0		
3.3	Верное численное значение максимальной температуры $t_{\max} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$	1.0		

Шифр

 Σ **9-Т5. Движение по спице**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Верно определено направления движения точки B — скорость направлена вдоль нити BC .	1.0		
1.2	Использование кинематической связи для нахождения скорости точки B : $v \cos \varphi = v_B$.	2.0		
1.3	Ответ: $v_B = \frac{\sqrt{3}}{2}v$	1.0		
2.1	Связь проекций ускорения точки C и точки B на сонаправленную с нитью BC ось: $(a_B)_{BC} - (a_C)_{BC} = \frac{(v'_B)^2}{l_{BC}}$.	3.0		
2.2	Найдена скорость точки B в новой системе отсчёта: $v'_B = v \sin \varphi$.	1.0		
2.3	Найдена длина нити $l_{BC} = \frac{v^2}{4a_\tau}$ (для получения балла, численное значение тригонометрических функций должно быть подставлено).	1.0		
3.1	Найдена длина нити $l_{AB} = l_{BC} \operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2 \sin^3 \varphi}{a_\tau \cos \varphi}$.	1.0		
3.2	Найдена проекция ускорения точки B на ось вдоль нити AB : $a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}} = \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi} a_\tau$.	1.0		
3.3	Найдено полное ускорение точки B : $a_B = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^6 \varphi} \cdot a_\tau = 2\sqrt{7}a_\tau$ (для получения балла, численное значение тригонометрических функций должно быть подставлено).	1.0		