

Второй тур

Задача 5. Вредная газировка (12 баллов)

Как вы знаете из одного из заданий регионального этапа, с 1 июля 2023 года в России введен акциз на сладкие напитки. В данной задаче мы предлагаем вам с помощью модели разобраться, как можно определять оптимальную ставку таких налогов.

Представим себе экономику, населенную 100 потребителями. Функция полезности каждого потребителя имеет вид $U = 120q - 3q^2/2 - pq - v(q)$, где q — количество выпитой газировки, p — ее цена для потребителя, $v(q) = q^2/2$ — долгосрочный вред здоровью от газировки. *Вред от газировки есть в любом случае*, но потребитель может как осознавать, так и не осознавать его. Если потребитель не осознает наличие вреда от газировки, он не знает о том, что в его полезности есть слагаемое « $-v(q)$ » (все остальные слагаемые ему известны в любом случае).

Рынок газировки является совершенно конкурентным. Средние издержки фирм постоянны и равны 20. Определим *истинное общественное благосостояние* как сумму полезности потребителей (с учетом вреда от газировки, который есть в любом случае) и поступлений в бюджет². Государство максимизирует истинное общественное благосостояние.

а) (2 балла) Найдите функцию спроса одного потребителя на газировку $q_d(p)$ в двух случаях: (1) если потребитель осознает вред от газировки и (2) если не осознает.

б) (9 баллов) Государство может ввести потоварный налог на производителей газировки по ставке t . Определите оптимальную для государства ставку потоварного налога t^* в следующих случаях:

- 1) все потребители осознают вред от газировки;
- 2) ни один потребитель не осознает вред от газировки;
- 3) 50 потребителей осознают вред от газировки, а остальные 50 — не осознают.

в) (1 балл) Логика введения налога в данной ситуации похожа на логику введения налога в одной из классических тем экономической науки. Назовите эту тему. Пояснение не требуется.

Решение

а) Если потребитель осознает вред от газировки, он максимизирует свою истинную полезность

$$U_{true}(q) = 120q - 3q^2/2 - pq - q^2/2 = (120 - p)q - 2q^2 \rightarrow \max_q.$$

Функция полезности квадратична, оптимум находится в вершине параболы с ветвями вниз, $q^* = (120 - p)/4 = 30 - p/4$. Это и есть искомая функция спроса $q_d(p)$

Если же потребитель не осознает вред от газировки, то он максимизирует «полезность»

$$U_{false}(q) = 120q - 3q^2/2 - pq = (120 - p)q - 3q^2/2 \rightarrow \max_q,$$

²Участник заключительного этапа без труда определит, что в данном случае в равновесии прибыль фирм равна нулю, и поэтому ее можно не учитывать.

откуда $q_d(p) = q^*(p) = (120 - p)/3 = 40 - p/3$.

Ответ: если осознает, то $q_d(p) = 30 - p/4$, а если не осознает, то $q_d(p) = 40 - p/3$.

Примечание: Мы получили, что потребители, не осознающие вред от газировки, предъявляют более высокий спрос на нее — все логично.

б) Пусть все потребители осознают вред от газировки. Поскольку информация полна, рынок газировки совершенно конкурентный, внешние эффекты отсутствуют, при невмешательстве государства общественное благосостояние максимально, а любой положительный налог приведет к DWL. Значит, оптимальная ставка налога t^* равна 0.

Это можно проверить формально.

Поскольку средние издержки постоянны и равны 20, при введении налога по ставке t равновесная цена для потребителя будет равна $p = 20 + t$. Поскольку все потребители одинаковы, они выберут один и тот же объем потребления q . Запишем истинное общественное благосостояние как функцию от этого объема:

$$W(q) = 100(120q - 3q^2/2 - (20 + t)q - q^2/2 + tq) = 100(100q - 2q^2).$$

Его можно сразу максимизировать по q или сначала подставить $q = q_d(p) = 30 - p/4 = 30 - (20 + t)/4$ и максимизировать по ставке налога t . Первый путь проще: оптимальный объем потребления q^* равен $100/4 = 25$. Он достигается при ставке t такой, что $q_d(20 + t) = 25$, то есть $30 - (20 + t)/4 = 25$, откуда $t = 0$.

Таким образом, несмотря на вред от газировки, в этом случае государство вмешиваться не должно. Потребители и так полностью учитывают этот вред при принятии решений.

Теперь допустим, что ни один из потребителей не осознает вред от газировки. Поскольку все потребители одинаковы, они выберут один и тот же объем потребления q . Функция истинного благосостояния имеет тот же вид, что и выше:

$$W(q) = 100(100q - 2q^2).$$

Оно по-прежнему максимально при $q = 25$. Отличие в том, что теперь спрос потребителей другой ($q_d(p) = 40 - p/3$), и чтобы достичь этого объема, нужно будет ввести налог. А именно, налог t должен удовлетворять уравнению $q_d(20 + t) = 25$, $40 - (20 + t)/3 = 25$, откуда $t^* = 25$. Этот случай также можно решить максимизацией по t .

Наконец, пусть только 50 потребителей осознают вред от газировки. Осознающий и не осознающий вред потребители выберут *разные* объемы потребления q_1 и q_2 , тогда благосостояние будет равно

$$W(q_1, q_2) = 50(100q_1 - 2q_1^2) + 50(100q_2 - 2q_2^2)$$

Его не нужно максимизировать отдельно по q_1 и по q_2 , потому что объемы q_1 и q_2 связаны через ставку налога. При ставке налога t

$$q_1(t) = 30 - (20 + t)/4 = (100 - t)/4;$$

$$q_2(t) = 40 - (20 + t)/3 = (100 - t)/3.$$

Подставляя эти значения в функцию благосостояния, получаем, что как функция от ставки налога благосостояние имеет вид

$$W(t) = 50(100(100 - t)/4 - 2(100 - t)^2/16) + 50(100(100 - t)/3 - 2(100 - t)^2/9).$$

По t эта функция квадратична, ветви параболы направлены вниз. Максимизируя ее (для удобства можно сделать замену $x = 100 - t$), получаем $t^* = 16$.

Ответ: 1) $t^* = 0$; 2) $t^* = 25$; 3) $t^* = 16$.

Примечание: мы получили, что чем больше потребителей осознают вред от газировки, тем меньше должен быть налог, что также логично.

в) Ответ: Внешние эффекты (экстерналии).

Примечание: если в экономике есть отрицательный внешний эффект, то экономический агент А своими действиями отрицательно влияет на другого экономического агента Б, но не учитывает этого при принятии решений, в результате чего с точки зрения общества объем деятельности А избыточен. Государство может скорректировать эту неэффективность, введя налог на деятельность агента А.

Здесь же агент А своими действиями отрицательно влияет на экономического агента А (самого себя), но не учитывает этого при принятии решений, в результате чего с точки зрения общества объем деятельности (в данном случае, потребления) агента А избыточен. Государство может скорректировать эту неэффективность, введя налог на потребление агента А.

Таким образом, ситуация аналогична ситуации с внешним эффектом, но этот эффект не внешний, а внутренний (но не осознаваемый). По аналогии со словом *экстерналия* (от англ. *external* — «внешний»), которым также называют внешний эффект, такой внутренний, но не осознаваемый эффект называется *интерналия* (от англ. *internal* — «внутренний»). Интерналия — это как бы экстерналия на самого себя. Тема интерналий и их регулирования является частью *поведенческой экономики*, области экономической науки, изучающей не вполне рациональное поведение людей.

Схема проверки

а) По 1 баллу за каждую полностью правильную функцию спроса. При арифметических ошибках баллы не ставились.

б) Если участник в каком-либо из трех случаев 1-3 максимизирует благосостояние по t , то ему за этот случай ставится:

1. 2 балла за функцию благосостояния $W(t)$ для данного случая.
2. 1 балл за нахождение ее точки максимума.

Если участник в случаях 1-2 максимизирует благосостояние по q (в случае 3 это невозможно), то ставится:

1. по 2 балла за вывод функции благосостояния $W(q)$.
2. 1 балл за нахождение ставки налога $t^* = 0$, при которой количество равно 25 в случае 1;
3. 1 балл за нахождение ставки налога $t^* = 25$, при которой количество равно 25 в случае 2;

Если участник решает случай 1 без вычислений (получает $t^* = 0$), ссылаясь на общий результат об эффективности при совершенной конкуренции, то ему ставится **3 балла** за эту часть.

Если в случаях 2 и 3 допущена ошибка, то снимается **1 балл** за хотя бы одну арифметическую ошибку и еще **1 балл**, если эта ошибка привела к ситуации, что налог в третьем случае оказался выше, чем во втором, или другой подобной ситуации, противоречащей экономическому смыслу.

Если при выводе функции благосостояния $W(q)$ или $W(t)$ не учтена важная составляющая (например, налоги или $v(q)$), то ставится **0 баллов**. Если была ошибка подсчета (часть слагаемых умножалась на 100, часть нет), то ставится **1 балл**. Если не было доведено до функции одной переменной, то тоже ставится **1 балл**.

в) 1 балл за верно указанную тему «Внешние эффекты» («Экстерналии», «Налоги Пигу»). В случае наличия также противоречивой темы, не связанной с задачей («Монополия», «Международная торговля» и др.), ставится **0 баллов** независимо от наличия правильного ответа.

Задача 6. Коммуникационная политика Центробанка (12 баллов)

С 2014 года публикация пресс-релизов по итогам заседаний Совета директоров Банка России происходит в соответствии с заранее известным регулярным графиком. В таких пресс-релизах денежные власти сообщают публике не только решение по ключевой ставке процента, но и свои прогнозы по динамике макроэкономических переменных. Получается, что Центральный банк влияет на решения экономических агентов сразу двумя способами: путем изменения процентной ставки (процентный канал монетарной политики) и путем предоставления новой информации (коммуникационный канал монетарной политики).

а) (4 балла) Раньше коммуникационному каналу не придавали особого значения, а в последнее время он стал вызывать больший интерес исследователей. Многие из них захотели оценить силу его влияния на инфляцию. Сделать это оказалось очень трудно. Как вы думаете, почему?

б) (4 балла) До 2020 года Банк России никому не сообщал прогноз траектории ставки процента, а с 2021-го стал это делать. Приведите два объяснения того, почему такое увеличение прозрачности политики может быть полезным для достижения целей Центрального банка.

в) (4 балла) Решение о том, чтобы сообщать прогноз ключевой ставки, было принято сравнительно недавно, так как некоторые эксперты опасались, что оно может привести к плохим последствиям. Приведите два примера возможных негативных эффектов от чрезмерного увеличения прозрачности монетарной политики.

Решение

а) Сложно изолировать эффект коммуникационной политики, отделив его от эффекта изменения ставки процента. Ведь обычно Центральный банк в один и тот же день меняет ключевую ставку процента и сообщает новую информацию (выпускает пресс-релиз). Таким образом, оба события одновременно влияют на экономику и отделить воздействие одного из них от другого затруднительно.

б) Главная цель Банка России – обеспечение низкой и стабильной инфляции. Для этого нужно управлять инфляционными ожиданиями. Сообщая экономическим агентам больше информации, Центральный банк делает свое будущее поведение более предсказуемым. Это помогает укрепить доверие между ним и экономическими агентами и привязать инфляционные ожидания экономических агентов к целевому уровню инфляции. Снижение инфляционных ожиданий в конечном счете помогает снизить и инфляцию.

Засчитываются и другие разумные соображения. Например, определенность по поводу ставок помогает фирмам и домашним хозяйствам лучше планировать потребление и инвестиции в долгосрочной перспективе. Это снижает волатильность ключевых макроэкономических показателей и, следовательно, помогает сглаживать циклические колебания экономики.

Также если население верит в прогнозы ЦБ, то через самосбывающиеся ожидания политика работает быстрее и с меньшими издержками (можно в меньшей степени увеличить ставку процента, из-за чего эффект на безработицу и выпуск будет мень-

ше). Хорошая и не слишком техническая статья на эту тему доступна по этой ссылке (Исаков и др., 2018). (<https://rjmf.econs.online/2018/4/fear-offorward-guidance/>)

в) Во-первых, экономические агенты могут принять прогноз Центрального банка по ставке за обязательство поддерживать ставку на заданном уровне. В этом случае, если прогноз не оправдается, то публика сочтет себя обманутой и перестанет доверять Центральному банку. То есть возникнет эффект прямо противоположный тому, что мы описали в предыдущем пункте (рост ожиданий и инфляция, рост издержек на проведение политики).

Во-вторых, публикация прогноза ключевой ставки может снизить стимулы экономических агентов самостоятельно анализировать экономические тенденции. Это может, с одной стороны, приводит к тому, что качество прогнозов в отдельных секторах может ухудшиться (представители отдельных отраслей могут лучше оценивать ситуацию в ней, а если они просто доверяют прогнозам ЦБ, то качество прогнозов может упасть). Это ведет к большей волатильности выпуска. Также в этом случае проблема может возникать из-за того, что ошибка в прогнозах ЦБ может транслироваться напрямую во все ошибки людей в экономике. Это приведет к систематической ошибке у всех агентов в экономике (все ошибаются в одну сторону), что также увеличивает волатильность экономики.

Представитель Банка России указывала на эти соображения в своей работе (Юдаева, 2018). (<https://rjmf.econs.online/2018/2/frontiers-ofmonetary-policy/>).

Схема проверки

а) 2 балла за указание на то, что эффекты ставки и коммуникационной политики сложно изолировать. 2 балла за пояснение, почему эффекты сложно изолировать (публикация и изменение ставки происходит одновременно).

Неверные ответы:

- мало данных
- у людей неправильные ожидания, разная степень доверия и финансовой грамотности, поэтому сложно прогнозировать
- измерить ожидания можно только по опросам, которые субъективны (но ожидания и так субъективны)
- сложно отделить действия ЦБ от прочих факторов, если не указано про их одновременность
- инфляция считается за большой промежуток времени

б) Каждый аргумент по 2 балла. 1 балл за аргумент (причину изменения), 1 балл за следствие.

Если оба аргумента неправильные (нет доведенного до конца вывода, что именно меняется и за счет чего), но сказано про рост доверия к ЦБ - 1 балл. Если нет прямого указания на рост доверия ЦБ из-за большей прозрачности - штраф 1 балл.

Комментарии:

- Ответ неверный, если меняются показатели, которые не важны с точки зрения целей ЦБ (например, рост инвестиций)
- Доверие само по себе не является причиной изменения, но является необходи-

мым для эффективной работы всех механизмов

в) Каждый аргумент по 2 балла. 1 балл - первоначальный эффект, 1 балл - негативное последствие

Неверные ответы:

- фискальное доминирование (правительство использует информацию о будущей политике и выпускает долг)
- асимметрия информации (не ясно, растёт или не растёт, не ясно, что негативного будет от роста асимметрии)
- запутаются в прогнозе
- обещание сдерживать экономику ведёт к тому, что она будет ещё больше разгоняться (по логике, согласно которой в пункте б) быстрее начинало работать сдерживание)
- все знают, что ставка вернется обратно, поэтому ничего не делают, потому что знают, что ставка вернется обратно и ждут этого
- открытое государство для иностранного влияния
- политика ЦБ начнет влиять на экономику слишком сильно (на самом деле он просто адаптируется к новой величине реакции)
- появятся возможности для спекуляций и арбитража

Задача 7. Неформальные контракты в команде (12 баллов)

Виктор, владелец игрового сайта, нанял тестировщиков Анну и Бориса. Их трудовые договоры предусматривают фиксированную зарплату. Перед ними стоит задача проверить корректность работы программного обеспечения сайта: Анна должна протестировать клиентскую часть, а Борис — серверную. Как клиентская, так и серверная часть с равными шансами может работать корректно или с ошибками, причём независимо от другой части, т.е. все четыре возможных варианта корректной/ошибочной работы двух частей сайта равновероятны.

Проблема состоит в том, что у Виктора нет возможности наблюдать, насколько добросовестно Анна и Борис выполняют свои задачи. Тот из них, кто работает добросовестно, несёт от своих усилий издержки, эквивалентные 15 тыс. руб., и если ошибки есть, он их найдет и исправит. Но вместо этого тестировщик может *отлынивать* — ничего не проверять, а просто сообщить, что ошибок не обнаружено. Если ошибки останутся в рабочей версии сайта, то сайт будет работать некорректно, и Виктор потеряет на этом 80 тыс. руб.

Понимая это, Виктор обещает Анне премию b_A , а Борису — премию b_B с условием, что премия выплачивается тестировщику, только если тот находит ошибку (предполагается, что Виктор может это наблюдать). Но здесь имеется другая проблема: премии не прописаны в трудовом договоре, это неформальное соглашение между сторонами. Виктор может его нарушить и не выплатить премию, — это не будет грозить ему судебным разбирательством. В этом случае, кого бы из тестировщиков ни обманули, одного или обоих, и Анна, и Борис увольняются по собственному желанию. Виктор в случае их ухода теряет ценность дальнейшего сотрудничества с ними, составляющую 50 тыс. руб. Даже если работник увольняется, он успеваеет получить свою фиксированную зарплату, прописанную в договоре — не выплачивать ее Виктор не может.

Последовательность действий такова:

1. Виктор предлагает Анне и Борису премии (будем считать, что каждая премия известна обоим);
2. Анна и Борис одновременно и независимо принимают решение, работать или отлынивать. В этот момент они не знают, есть ли ошибки в сайте;
3. Неотлынивающие работники выявляют и исправляют ошибки, если они есть;
4. Виктор платит премии по результатам работы Анны и Бориса или отказывается платить.

Также предполагается, что:

- Анна, Борис и Виктор максимизируют математическое ожидание³ своих доходов с учётом издержек;
- несмотря на вышеуказанные издержки, проект Виктора достаточно прибыльный, чтобы приносить ему положительную прибыль в любом случае;
- если тестировщику безразлично, работать добросовестно или отлынивать, тестировщик работает добросовестно. Также тестировщики не уходят от Виктора, если он их не обманул.

³Если некая величина x принимает n значений x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n , то ее математическое ожидание по определению равно $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$.

а) (1 балл) Если Анна ожидает, что премия b_A будет выплачена, какой должна быть эта премия, чтобы стимулировать Анну добросовестно искать ошибки?

б) (2 балла) Может ли Виктор пообещать тестирующим премии, стимулирующие их искать ошибки, а самого Виктора — никогда не обманывать работников с выплатой премий?

в) (3 балла) Допустим, Виктор предлагает премию только Анне, $b_B = 0$. Может ли Виктор пообещать Анне премию, стимулирующую ее искать ошибки, а самого Виктора — не обманывать Анну с выплатой премии? Если да, то какое значение b_A оптимально для Виктора при этих условиях? Выиграет ли Виктор по сравнению с ситуацией, когда он вообще не предлагает премии?

г) (5 баллов) Теперь рассмотрим случай, когда премия тестирующего может зависеть не только от его результатов, но и от результатов другого тестирующего. А именно, предположим, что если только один тестирующий находит ошибку, то он получает премию в размере b_1 , а если оба, то каждый получает премию в размере b_2 . Определите все пары премий (b_1, b_2) , которые стимулируют Анну и Бориса добросовестно искать ошибки⁴, а Виктора — никогда не обманывать работников с выплатой премий. Какие из этих пар премий (b_1, b_2) оптимальны для Виктора? Выиграет ли Виктор по сравнению с пунктом в)?

д) (1 балл) Существует ли среди оптимальных пар (b_1, b_2) в пункте г) такая, при которой Виктор по сути формирует фиксированный премиальный фонд, который поровну распределяется между нашедшими ошибки?

Решение

а) Если Анна работает добросовестно, то она несёт издержки 15 тыс. и с вероятностью $\frac{1}{2}$ получает $b_A \Rightarrow$ её ожидаемый доход равен $\frac{b_A}{2} - 15$. Если Анна отлынивает, то получает 0. Следовательно, премия b_A стимулирует работать, если $b_i \geq 30$.

б) Если оба тестирующего нашли ошибки, то Виктор должен предложить премии в сумме не менее $30 + 30 = 60$ тыс. Но тогда ему выгодно обмануть тестирующих, потеряв лишь 50 тыс. Следовательно, ответ — «нет».

в) Если Виктор премирует только Анну, то имеет смысл обещать ей премию 30 тыс. Такую премию Виктор действительно будет платить, так как это лучше, чем потерять 50 тыс. от ухода тестирующих. Несмотря на остающуюся вероятность $\frac{1}{2}$ некорректной работы сайта, такое решение будет выгодным для Виктора: он потеряет $\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 30 + \frac{1}{4} \cdot 80 + \frac{1}{4} \cdot (30 + 80) = 55$ тыс., а если вообще не будет предлагать премии, то потеряет $\frac{3}{4} \cdot 80 = 60$ тыс.

г) Анна и Борис будут работать, если

$$\frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_2 \geq 15$$

т.е. при $b_1 + b_2 \geq 60$. Если премия полагается только Анне, Виктор не будет её обманывать при $b_1 \leq 50$, и аналогично для Бориса. Если же премия полагается обоим,

⁴Точнее, каждому должно быть выгодно работать добросовестно, если другой тестирующий тоже работает добросовестно.

то Виктор не будет их обманывать при $2b_2 \leq 50$, т.е. при $b_2 \leq 25$. Из множества допустимых пар (b_1, b_2) , удовлетворяющих неравенствам $b_1 + b_2 \geq 60$, $b_1 \leq 50$, $b_2 \leq 25$, нужно выбрать те, которые минимизируют ожидаемые расходы Виктора, составляющие $\frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4} \cdot 2b_2 = \frac{b_1+b_2}{2}$. Эта функция достигает при заданных ограничениях минимума, равного 30, когда $b_1 + b_2 = 60$, $b_1 \in [35, 50]$ и, соответственно, $b_2 \in [10, 25]$. Это выгоднее для Виктора, чем схема в п. в), при которой его потери составляют 55 тыс.

д) Можно сформировать премиальный фонд в 40 тыс., т.е. назначить $b_1 = 40$, $b_2 = 20$. Это одно из оптимальных решений.

Схема проверки

а) 1 балл за правильное решение.

Частая ошибка А: некоторые участники получали $b_A = 15$ (из-за неправильно понятой/вычисленной вероятности получения премии или предположения, что Анна несет издержки только при обнаружении ошибки). Тогда ставилось 0 баллов за п. а) и снижались баллы в последующих пунктах, там, где эта ошибка существенно влияет на выводы.

б) 2 балла за правильное решение.

Частая ошибка Б: прибыль Виктора рассчитывалась, как если бы он принимал решение об обмане еще до выяснения результата работы тестировщиков. Это неэкономично: если информация поступила, надо её использовать. Эта ошибка приводила к 0 баллов за п. б) и снижению баллов в последующих пунктах, где это влияет на выводы.

При допущенной ошибке А ($b_A = 15$) нельзя корректно решить п. б) — получается другой вывод. Поэтому и за п. б) ставилось 0 баллов.

в) 1 балл за условие на b_A $30 \leq b_A \leq 50$ и вывод, что оптимум для Виктора — $b_A = 30$.

2 балла за сравнение расходов Виктора, если он предлагает или не предлагает премию Анне, и вывод о целесообразности премирования.

г) 1 балл за условие, что Анна и Борис будут работать: $b_1 + b_2 \geq 60$ (ошибка Б не влияет).

1 балл за условия, что Виктор не будет обманывать: $b_1 \leq 50$, $b_2 \leq 25$.

1 балл за постановку задачи Виктора: минимизировать $\frac{b_1+b_2}{2}$ при условиях, полученных выше (ошибка Б не влияет).

1 балл за нахождение всех решений задачи Виктора.

1 балл за сравнение расходов Виктора, в п. в) и г) и вывод, что схема в п. г) выгоднее для него (ошибка Б не влияет).

д) 1 балл за решение, ставится только если доказано, что $(b_1, b_2) = (40, 20)$ — оптимум в п. г) и есть с чем его сравнить в п. в); ошибка Б не влияет.

Задача 8. От ВВП к КПВ*(12 баллов)*

В мире, где могут производиться только товары X и Y , страна Альфа является малой открытой экономикой, то есть может покупать и продавать любое количество этих товаров по фиксированным ценам. Мировой валютой является международный тугрик (м.т.). Мировая цена товара X равна p м.т., а мировая цена товара Y равна 1 м.т. В разное время значение p было разным, меняясь в пределах от $1/4$ до 1 включительно. Из исторических данных вы знаете, что валовой внутренний продукт (ВВП) страны по паритету покупательной способности (стоимость произведенных страной товаров в мировой валюте) зависит от p по следующему правилу:

$$\text{ВВП}(p) = 1 + 2p - 2\sqrt{p} \text{ м.т.}$$

Эта формула верна для каждого $p \in [1/4; 1]$.

Обозначим максимально возможные объемы производства товаров в стране за X_{\max} и Y_{\max} . При каждом p объемы производства в стране Альфа выбираются так, чтобы стране стали доступны объемы потребления товаров, лежащие на кривой торговых возможностей (КТВ). Известно, что альтернативные издержки производства каждого из товаров положительны и строго возрастают, и что для любого объема $X_0 \in [0; X_{\max}]$ существует такая мировая цена $p \in [1/4; 1]$, при которой в стране производится ровно X_0 единиц товара X .

а) (4 балла) Найдите X_{\max} и Y_{\max} .

б) (1 балл) Для каждого $p \in [1/4; 1]$ запишите уравнение КТВ страны (Y как функцию от X).

в) (7 баллов) Восстановите уравнение КПВ страны (Y как функцию от X). Подсказка: это можно сделать без использования производной.

Решение

а) Из строго возрастающих альтернативных издержек следует, что страна будет выбирать объемы производства в точке касания КПВ и КТВ, или в точке пересечения КПВ и КТВ, если это одна из двух крайних точек КПВ.

Пусть $X^*(p)$ и $Y^*(p)$ — объемы производства товаров X и Y в стране как функции от p . Из геометрических соображений о касании следует, что $X^*(p)$ возрастает (хотя бы нестрого). Предположим, что $X^*(1) < X_{\max}$. Тогда, в силу возрастания $X^*(p)$, $X^*(p) \leq X^*(1) < X_{\max}$ для всех $p \in [1/4; 1]$, а значит, для значений $X_0 \in (X^*(1); X_{\max})$ не существует цены $p \in [1/4; 1]$ такой, что $X^*(p) = X_0$. По условию же такая цена существует. Значит, предположенное нами неравенство $X^*(1) < X_{\max}$ неверно, и следовательно, $X^*(1) = X_{\max}$ и $Y^*(1) = 0$.⁵

Аналогично, $X^*(1/4) = 0$ и значит, $Y^*(1/4) = Y_{\max}$.

Теперь можно найти X_{\max} и Y_{\max} из данных о ВВП при ценах 1 и $1/4$ соответственно.

$$X_{\max} + 0 = 1 \cdot X^*(1) + Y^*(1) = \text{ВВП}(1) = 1.$$

⁵Тот факт, что при $X = X_{\max}$ $Y = 0$ следует из условия о том, что альт. издержки производства каждого из товаров положительны, а значит, у множества производственных возможностей нет вертикальных и горизонтальных границ.

$$0 + Y_{\max} = (1/4) \cdot X^*(1/4) + Y^*(1/4) = \text{ВВП}(1/4) = 1/2.$$

Ответ: $X_{\max} = 1, Y_{\max} = 1/2$.

б) Уравнением КТВ является прямая $pX + Y = \text{ВВП}(p)$ (при движении вдоль КТВ стоимость произведенных товаров в международных ценах не меняется). Отсюда,

$$Y = \text{ВВП}(p) - pX = 1 + 2p - 2\sqrt{p} - pX = 1 - 2\sqrt{p} + p(2 - X).$$

Ответ: $Y(X) = 1 - 2\sqrt{p} + p(2 - X)$.

в) Мы знаем, что крайние точки КПВ — $(1,0)$ и $(0,1/2)$. Теперь нам нужно найти все остальные точки на КПВ.

Способ 1 (без использования производной).

Докажем, что чтобы найти уравнение КПВ, нам нужно всего лишь *проминимизировать* найденное выше уравнение КТВ по p . Это следует из того, что КПВ является *нижней огибающей* семейства КТВ.

А именно, пусть искомое уравнение есть $Y = \text{КПВ}(X)$. Поскольку для любого p КПВ лежит не выше КТВ, получаем, что для любого $X \in [0; X_{\max}]$ и любого $p \in [1/4; 1]$ верно неравенство

$$\text{КПВ}(X) \leq 1 - 2\sqrt{p} + p(2 - X) \quad (8.1)$$

Но возьмем некий фиксированный объем X и рассмотрим цену $p_0(X) \in [1/4; 1]$, при которой в стране производится именно этот объем X (такая цена есть по условию). Поскольку при этой цене производится именно объем X , при объеме X и цене $p_0(X)$ значения КПВ и КТВ совпадают, то есть в (8.1) достигается равенство.

Итак, мы получили, что для всех $p \in [1/4; 1]$ верно неравенство (8.1), причем при каком-то $p \in [1/4; 1]$ оно выполняется как равенство (этот факт проиллюстрирован на рис. 8.1). А это значит, что при каждом X КПВ(X) равно *минимальному* значению функции $f(p) = 1 - 2\sqrt{p} + p(2 - X)$ на отрезке $[1/4; 1]$.

Осталось найти это минимальное значение. $f(p)$ является квадратичной функцией от $t = \sqrt{p}$, Поскольку $X \leq X_{\max} = 1 < 2$, ветви параболы направлены вверх (здесь мы существенно использовали найденное раньше значение $X_{\max} = 1$). Поскольку $p \in [1/4; 1], t \in [1/2; 1]$. Вершина имеет абсциссу

$$t_{\text{в}} = \frac{1}{2 - X},$$

что принадлежит отрезку $[1/2; 1]$ при $0 \leq X \leq 1$, значит, это действительно точка минимума. Отсюда

$$p_0(X) = \frac{1}{(2 - X)^2}$$

и

$$\text{КПВ}(X) = 1 - 2\frac{1}{2 - X} + \frac{1}{(2 - X)^2}(2 - X) = \frac{2 - X - 2 + 1}{2 - X} = \frac{1 - X}{2 - X}.$$

Способ 2 (через анализ производных).

Пусть $X(p)$ и $Y(p)$ — объемы производства товаров в стране. Для каждого p выполнено тождество

$$Y(p) + pX(p) = \text{ВВП}(p) = 1 + 2p - 2\sqrt{p}.$$

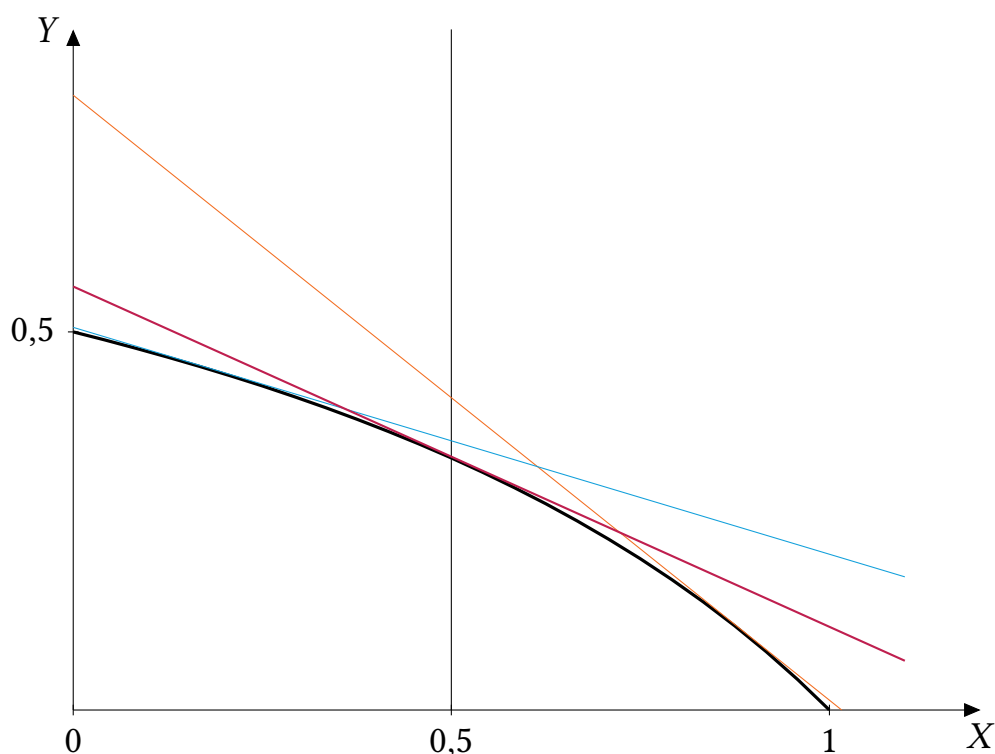


Рис. 8.1: Идея решения: значение КПВ равно минимальному из значений всех КТВ на вертикальной прямой (при фиксированном X). На рисунке изображены три КТВ, включая ту, значение которой при данном X минимально среди всех КТВ (изображена красным).

Продифференцируем его по p , получим

$$Y'(p) + 1 \cdot X(p) + X'(p)p = 2 - \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad (8.2)$$

Теперь заметим, что поскольку страна всегда находится в точке на КПВ, $Y(p)$ и $X(p)$ связаны тождеством

$$Y(p) = \text{КПВ}(X(p)).$$

Продифференцируем и его:

$$Y'(p) = \text{КПВ}'(X(p))X'(p).$$

Но поскольку экономика находится в точке касания КПВ и КТВ, а наклон КТВ равен $-p$, для любого p выполнено

$$\text{КПВ}'(X(p)) = -p.$$

Подставляя это соотношение в предыдущее равенство, получаем, что

$$Y'(p) = -pX'(p).$$

Подставляя это в (8.2), получаем, что $X'(p)p$ сокращается, и в итоге,

$$X(p) = 2 - \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Выражая отсюда p , получаем что, цена $p_0(X)$, при которой оптимально производить ровно X единиц товара X задается как

$$p_0(X) = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

Поскольку при такой цене КПВ и КТВ в точке X совпадают, найти КПВ можно, подставив эту цену в уравнение КТВ.

Ответ: $Y(X) = \frac{1-X}{2-X}$.

Примечание 1: Как видим из этого уравнения КПВ, $X_{\max} = 1$ и $Y_{\max} = 1/2$, все сошлось. При данной КПВ, являющейся участком гиперболы, альтернативные издержки производства действительно строго возрастают, см. рис. 8.1. Решив прямую задачу, можно проверить, что при данной КПВ ВВП описывается как раз функцией, данной в условии.

Примечание 2: приведенный метод восстановления КПВ по данным о ВВП работает при любом числе товаров. Предположим, что в открытой экономике есть 1000 товаров, а именно, товары $Y, X_1, X_2, \dots, X_{999}$. Пусть p_i — цена товара X_i , а цена товара Y принята за единицу. Допустим, мы смогли оценить зависимость ВВП от 999 цен p_1, p_2, \dots, p_{999} , и получили функцию ВВП(p_1, p_2, \dots, p_{999}). Тогда мы можем точно так же сначала восстановить КТВ как

$$\text{КТВ} = \text{ВВП}(p_1, p_2, \dots, p_{999}) - p_1 X_1 - p_2 X_2 - \dots - p_{999} X_{999},$$

а затем найти 1000-мерную КПВ $Y(X_1, X_2, \dots, X_{999})$, проминимизировав это выражение для КТВ по всем ценам p_1, p_2, \dots, p_{999} . Обоснование этого метода ровно то же, что и в случае двух товаров.

Схема проверки

а) Всего за пункт 4 балла, из них:

- Правильные ответы для X_{\max} и Y_{\max} — по 1 баллу.
- Обоснование — 2 балла. Ссылка на то, что $X(p)$ возрастает, необходима для обоснования.

б) 1 балл за верное уравнение КТВ.

в) Всего за пункт 7 баллов. При решении Способом 1 из них:

- Идея о том, что для получения КПВ нужно проминимизировать КТВ по p при каждом x (с обоснованием) — 5 баллов. При этом:
 - если есть эта идея без обоснования — 3 балла.
 - если есть только идея о том, что КПВ является нижней огибающей всех КТВ (без дальнейшей минимизации) — 3 балла.
- Получение зависимости $X(p)$ или $p(X)$ — 1 балл.
- Получение итоговой КПВ — 1 балл.

Решение способом 2 оценивалось полным баллом.

За арифметическую ошибку снимался 1 балл.

Особые случаи:

- Если участник просто продифференцировал зависимость $КТВ(X, p)$ по p без идеи о том, что надо искать минимум (или с неверной идеей о том, что надо искать максимум), и находит в результате верное уравнение КПВ, ему ставится 2 балла из 7 за пункт в).
- Если участник просто «угадал» верное уравнение КПВ, и обосновал, что оно удовлетворяет всем условиям задачи, за пункт в) ставится полный балл.