

Первый тур

Задача 1. *Налоги на сверхприбыль*

(12 баллов)

1 января 2024 года в России был установлен налог на сверхприбыль, подразумевающий уплату компаниями части прибыли сверх определенного порога в пользу государства. В данной задаче вам предлагается проанализировать влияние разных версий такого налога на объем выпуска фирмы.

В городе N, далеко от Татарстана, всего одна фирма производит сладкое лакомство чак-чак. Функция спроса на чак-чак в городе имеет вид $Q(P) = 50 - P$, где P — цена на чак-чак, Q — объем его потребления. Общие издержки производства Q единиц продукции составляют $TC(Q) = 10Q$. Во всех пунктах фирма максимизирует прибыль (за вычетом налога, если он есть). Если фирма безразлична между несколькими объемами выпуска, она выбирает минимальный из них.

Определите объем выпуска, который выберет фирма, в следующих независимых друг от друга случаях:

а) (2 балла) В отсутствие налогообложения.

б) (3 балла) Введен налог на сверхприбыль. А именно, если до уплаты налога фирма имеет прибыль π не более, чем 300, налог не взимается; в противном случае фирма должна заплатить в бюджет 30 % от сверхприбыли, то есть от величины $(\pi - 300)$.

в) (3 балла) Введен налог на прибыль при высокой прибыли. А именно, если до уплаты налога фирма имеет прибыль π не более, чем 300, налог не взимается; в противном случае фирма должна заплатить в бюджет 30 % от всей прибыли π .

г) (4 балла) Введен налог при высокой маржинальности (доле прибыли в выручке). А именно, если до уплаты налога прибыль составляет не более половины выручки, $\pi \leq 0,5TR$, налог не взимается; в противном случае фирма должна заплатить в бюджет такую сумму T , что с учетом этой выплаты доля прибыли в выручке снижается до 0,5, то есть такую сумму T , что $(\pi - T)/TR = 0,5$.

Решение

а) Фирма выбирает Q , чтобы максимизировать прибыль $\pi(Q) = (50 - Q)Q - 10Q = 40Q - Q^2$. Оптимум находится в вершине параболы, $Q^* = 20$.

Ответ: $Q^* = 20$.

б) Составим функцию прибыли с учетом налога. Найдем, при каких объемах выпуска прибыль до налога больше 300. Запишем неравенство

$$Q(40 - Q) > 300.$$

Корни соответствующего уравнения легко угадать, это $Q = 10$ и $Q = 30$. Поскольку слева стоит парабола с ветвями вниз, неравенство выполнено между корнями уравнения, то есть при $Q \in (10; 30)$. При этих Q фирма будет платить налог, ее итоговая прибыль составит $Q(40 - Q) - 0,3(Q(40 - Q) - 300) = 0,7Q(40 - Q) + 90$. При других Q фирма не будет платить налог.

Значит, с учетом налога функция прибыли примет вид

$$\pi(Q) = \begin{cases} Q(40 - Q), & Q \leq 10; \\ 0,7Q(40 - Q) + 90, & 10 < Q < 30; \\ Q(40 - Q), & Q \geq 30. \end{cases}$$

Поскольку функция прибыли непрерывна, возрастает при $Q \leq 10$ и убывает при $Q \geq 30$, ее максимум находится на отрезке $[10; 30]$. Как видим, на этом отрезке функция имеет ту же точку максимума, что и исходная функция прибыли $Q(40 - Q)$, это $Q^* = 20$.

Ответ: $Q^* = 20$.

Примечание: Есть и другие решения этого пункта. Например, заметим, что прибыль после уплаты налога π и прибыль до уплаты налога π_1 связаны соотношением $\pi_1 = f(\pi)$, где

$$f(\pi) = \begin{cases} \pi, & \pi \leq 300; \\ 300 + 0,7(\pi - 300), & \pi > 300. \end{cases}$$

Поскольку $f(\pi)$ — возрастающая функция, точки максимума $\pi(Q)$ и $f(\pi(Q))$ совпадают. Значит, $Q^* = 20$.

в) В этом случае при $Q \leq 10$ и $Q \geq 30$ функция прибыли не меняется, аналогично пункту б). При $Q \in (10; 30)$, прибыль фирмы после уплаты налога будет иметь вид просто $0,7Q(40 - Q)$. Значит,

$$\pi(Q) = \begin{cases} Q(40 - Q), & Q \leq 10; \\ 0,7Q(40 - Q), & 10 < Q < 30; \\ Q(40 - Q), & Q \geq 30. \end{cases}$$

Эта функция разрывна, «прыгает» вниз при $Q = 10$ и вверх при $Q = 30$. Поскольку функция возрастает при $Q \leq 10$ и убывает при $Q \geq 30$, ее максимум достигается либо при $Q = 10$, либо при $Q = 30$, либо в точке максимума на среднем интервале, это $Q = 20$. Сравним значения в этих точках: $\pi(10) = \pi(30) = 300$ (это мы знаем по построению), $\pi(20) = 0,7 \cdot 400 = 280 < 300$. Значит, максимум достигается при $Q = 10$ и $Q = 30$. По условию, фирма выберет минимальный выпуск, то есть $Q^* = 10$.

Ответ: $Q^* = 10$.

г) Найдем, при каких Q доля прибыли в выручке больше, а при каких — меньше 50%. Например, решим неравенство

$$\frac{\pi(Q)}{TR(Q)} = \frac{(40 - Q)Q}{(50 - Q)Q} > 0,5.$$

Преобразовав, получаем $40 - Q > 0,5(50 - Q)$, откуда $15 > 0,5Q$, $Q < 30$.

Значит, при $Q \geq 30$ фирма не будет платить налог, и получит прибыль, как раньше, $(40 - Q)Q$. При $Q < 30$ ее прибыль равна $Q(40 - Q) - T$, но по построению сумма налога

T ровно такая, что

$$\frac{Q(40 - Q) - T}{Q(50 - Q)} = 0,5,$$

так что $Q(40 - Q) - T = 0,5Q(50 - Q)$, итоговая прибыль будет равна половине выручки. Значит, в итоге

$$\pi(Q) = \begin{cases} 0,5Q(50 - Q), & Q < 30; \\ Q(40 - Q), & Q \geq 30. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна, и, как мы знаем из анализа выше, убывает при $Q \geq 30$. Значит, ее максимум достигается при $Q \leq 30$. Вершиной параболы $0,5Q(50 - Q)$ является точка $Q = 25$ (это не что иное как точка максимума выручки), она принадлежит отрезку $[0; 30]$. Значит, она и будет итоговой точкой максимума.

Ответ: $Q^* = 25$.

Примечание: В пункте г) мы получили, что при введении налога выпуск *растет* ($25 > 20$), что необычно. Объяснение состоит в том, что сумма налога как функция от выпуска, $T(Q)$, не является возрастающей функцией от Q , как в стандартных случаях, — и поэтому налог отнюдь не стимулирует сокращать выпуск.

Схема проверки

Во всей задаче проверка достаточных условий максимума (указание на направление ветвей параболы и пр.) не требуется.

а) Максимальная оценка за пункт — 2 балла, из них:

- Выписывание функции прибыли (или условия $MR = MC$ с подставленными функциями) — 1 балл
- Нахождение оптимума $Q^* = 20$ — 1 балл.

б) Максимальная оценка за пункт — 3 балла, из них:

- Нахождение границ $Q = 10$ и $Q = 30$ — 1 балл.
- Нахождение функции прибыли при $Q \in (10; 30)$ с указанием границ — 1 балл.
- Нахождение и обоснование итогового оптимума — 1 балл.

в) Максимальная оценка за пункт — 3 балла, из них:

- Нахождение функции прибыли при $Q \in (10; 30)$ с указанием границ — 1 балл.
- Вывод о том, что оптимальный выпуск лежит в множестве $\{10, 20, 30\}$ — 1 балл.
- Сравнение прибыли при $Q = 10$, $Q = 20$, $Q = 30$, нахождение оптимума и итогового ответа — 1 балл,
- За выбор $Q = 30$ вместо / вместе с $Q = 10$ - баллы не снижаются

Если границы $Q = 10$ и $Q = 30$ не найдены в пункте б), но найдены в пункте в), за это ставится 1 балл в пункте б).

Границы в пунктах б) и в) также могут быть записаны в терминах цены p или прибыли π .

г) Максимальная оценка за пункт — 4 балла, из них:

- Нахождение границы взимания налога $Q = 30$ — 1 балл.
- Нахождение функции прибыли при $Q < 30$ — 1 балл.
- Нахождение оптимума при $Q \leq 30$, то есть $Q^* = 25$ — 1 балл.

- Обоснование того, что $Q^* = 25$ является оптимумом всей функции прибыли (графика достаточно) — 1 балл.

Задача 2. День из жизни аналитика (12 баллов)

Представьте, что вы аналитик, работающий в крупной компании, которая предоставляет возможность различным фирмам продавать товары частным лицам на собственной интернет-площадке (такая компания называется *маркетплейсом*) за комиссию в размере 10 % с каждой покупки. Проанализировав возможные точки роста компании, вы пришли к идее запуска скидок на стоимость товара: компания покрывает часть стоимости товара для покупателя, причем продавец получает деньги в полном объеме.

а) (3 балла) Вы назначаете встречу с коллегами, на которой хотите обосновать внедрение скидок. Приведите три позитивных для компании эффекта запуска скидок и поясните, как именно они влияют на бизнес. Если приведено больше трех аргументов, будут оценены первые три.

б) (1 балл) Один коллега интересуется, какой должна быть эластичность спроса покупателей по цене — высокой или низкой по модулю — чтобы внедрение скидок на стоимость товара наиболее вероятно привело к росту прибыли компании. Что вы ответите и почему?

в) (1 балл) Другая коллега интересуется, верно ли, что если ввести скидку в размере 5 %, то цена для потребителя снизится ровно на 5 %. Что вы ответите и почему?

г) (3 балла) Коллеги соглашались с тем, что запуск скидок — хорошая идея. Однако возникает следующий вопрос: какие именно скидки установить? Поскольку к текущему моменту среднестатистический покупатель совершил на площадке три покупки, вы пришли к трем альтернативам: (1) скидка в размере 5 % на покупку, совершаемую на площадке впервые, (2) скидка в размере 5 % на четвертую покупку на площадке, (3) скидки в размере 5 % на все покупки. Если, например, будет выбрана вторая альтернатива, то пользователь, который до начала акции совершил хотя бы четыре заказа на площадке, уже не сможет получить скидку. Приведите по одному преимуществу каждого варианта над остальными. Если приведено больше одного аргумента для какого-то сценария, будет оценен только первый.

д) (2 балла) Выбор пал на скидку на первую покупку. Остался финальный шаг — измерить влияние скидок на важные для компании показатели (другими словами, *метрики*). Ваш коллега предлагает следующий способ: (1) замерить метрики текущего месяца, пока скидки еще не запущены, (2) в следующем месяце запустить скидки для всех пользователей и замерить метрики, (3) для каждой метрики вычесть ее значение в первый месяц из значения во второй месяц и, в зависимости от полученного результата, сделать вывод о том, как запуск скидок влияет на нее — увеличивает или уменьшает. Верно ли, что измеренный таким образом эффект будет корректной оценкой влияния скидки на метрики? Почему? Предполагайте, что одного месяца достаточно для того, чтобы все желающие узнали про запуск скидок и совершили транзакции на площадке.

е) (2 балла) Предложите свой способ, который позволил бы, насколько это возможно, достоверно оценить влияние скидок на метрики.

Решение

Для решения задачи важно понимать, что основной целью бизнеса является извлечение дохода, а именно нахождение баланса между получением дохода здесь и сейчас (краткосрочным доходом), и в более длинной перспективе (долгосрочным доходом).

а) Возможные варианты позитивных эффектов внедрения скидок:

- Увеличение общего количества покупок.
- Увеличение количества покупок одним пользователем.
- Увеличение количества покупателей на площадке.
- Увеличение количества продавцов на площадке.
- Увеличение оборота (суммы стоимостей всех проданных товаров) компании.
- Увеличение возвращаемости пользователей.

Эти эффекты приводят к тому, что наш сервис отбирает рыночную долю — заказы и оборот — у конкурентов (за счет перетока пользователей от них, а также за счет того, что большее число новых пользователей совершают первую транзакцию именно на нашей площадке), а также к тому, что пользователи — как покупатели, так и продавцы — привыкают к нашему маркетплейсу. Соответственно, облагаемая комиссией денежная база при внедрении скидок растет, что приводит к тому, что хотя в краткосрочном периоде прибыль и может снизиться из-за скидок, в долгосрочном периоде она, вероятно, вырастет (особенно если в будущем снизить размер скидок или увеличить размер комиссии).

б) Спрос покупателей должен характеризоваться высокой эластичностью, чтобы рост количества заказов компенсировал для компании снижение выручки с одного заказа.

в) В таком случае у продавцов будет стимул немного поднять ранее установленную цену на свои товары, поскольку часть этого повышения маркетплейс компенсирует для потребителя. Следовательно, если ввести скидку в размере 5 % на стоимость товара, то за счет роста цены товара конечная цена для потребителя снизится менее чем на 5 %.

Данная механика напоминает субсидирование в стандартных экономических моделях, когда весь размер субсидии распределяется в некоторой пропорции между ценой потребителя и ценой производителя.

г) Возможные преимущества скидок на первую покупку:

- Это самый дешевый способ привлечь на площадку покупателя, который раньше никогда ей не пользовался.
- Такие скидки приводят к самым низким издержкам на субсидирование покупок, но только при условии, что потенциальное количество первых покупок *меньше* потенциального количества четвертых покупок. Такое возможно, например, если на рынке осталось *мало* пользователей, которые не пользовались нашим маркетплейсом.

Возможные преимущества скидок на четвертую покупку:

- Это самый дешевый способ увеличить средний показатель количества покупок на одного пользователя (то есть, преодолеть порог в три заказа на пользователя и, вероятно, улучшить возвращаемость покупателей, благодаря тому, что у боль-

шего количества пользователей выработается привычка к использованию маркетплейса).

- Такая скидка, в отличие от прочих, может привести к совершению покупателями первых заказов без скидки с целью достижения четвертой покупки со скидкой. То есть, она приводит к большему количеству более маржинальных заказов — заказов без скидки. Пример: пользователь первым, вторым и третьим заказами покупает по одной паре носков, а четвертым заказом приобретает ноутбук со скидкой.
- Такие скидки приводят к самым низким издержкам на субсидирование покупок, но только при условии, что потенциальное количество первых покупок *больше* потенциального количества четвертых покупок. Такое возможно, например, если на рынке осталось *много* пользователей, которые не пользовались нашим маркетплейсом.

Возможные преимущества скидок на все покупки:

- Наибольший рост общего количества покупок.
- Наибольший рост количества покупок одним пользователем.
- Наибольший рост количества покупателей на площадке.
- Наибольший рост количества продавцов на площадке.
- Наибольший рост оборота (суммы стоимостей всех проданных товаров) компании.
- Наибольший рост возвращаемости пользователей.

д) Проблема предложенного подхода — несопоставимость сравниваемых метрик. За время тестирования могут произойти определенные события (сезонные факторы, наступление праздников, вступление в силу новых законов, и т. д.), которые сами по себе способны влиять на поведение пользователей и метрики, а значит измеренная разница в метриках не в полной мере будет объясняться именно эффектом запуска скидок.

е) Возможные способы более достоверной оценки влияния скидок на метрики:

- Случайный эксперимент (также называемый *АБ-тестом*): можно запустить скидки только для случайно выбранной половины пользователей и сравнить метрики в двух группах — контрольной, или группе А, в которой нет скидок, и тестовой, или группе Б, в которой есть скидки (в таком случае единственным фактором, объясняющим разницу в метриках, будет именно запуск скидок, поскольку в среднем пользователи из двух групп одинаковые). Случайность назначения скидок пользователям здесь крайне важна. Если предложить, например, создать два идентичных маркетплейса, в одном из которых включить скидки, а в другом — не включать, то ясно, что покупатели будут гораздо чаще покупать на первой площадке, нежели на второй, а значит измеренный эффект запуска скидок будет существенно завышен.
- Свитчбэк-тестирование: можно модифицировать предложенный коллегой способ так, что, например, по четным дням скидка будет доступна всем пользователям, а по нечетным дням недоступна никому, и сравнить метрики четных дней с метриками нечетных дней.

- Использование прогнозной модели (оценивается в 1 балл, поскольку описанная в условии ситуация позволяет использование более надежного способа оценки причинно-следственного эффекта — АБ-теста, а использование прогнозной модели в реальной жизни упирается в тот факт, что все такие модели обладают далеко не идеальным качеством предсказания): с ее помощью можно предсказать значения метрик для следующего месяца и сравнить предсказание — прогноз метрик в отсутствие скидок — с реальной ситуацией — метриками при запуске скидок.

Схема проверки

Во всей задаче проверка достаточных условий максимума (указание на направление ветвей параболы и пр.) не требуется.

а) Максимальная оценка за пункт — 3 балла: по одному баллу за каждый релевантный приведенный аргумент с пояснением того, как описанные эффекты влияют на доход компании.

б) Максимальная оценка за пункт — 1 балл: полный балл ставится за верный ответ с пояснением.

в) Максимальная оценка за пункт — 1 балл: полный балл ставится за верный ответ с пояснением.

г) Максимальная оценка за пункт — 3 балла: по одному баллу за каждый приведенный аргумент.

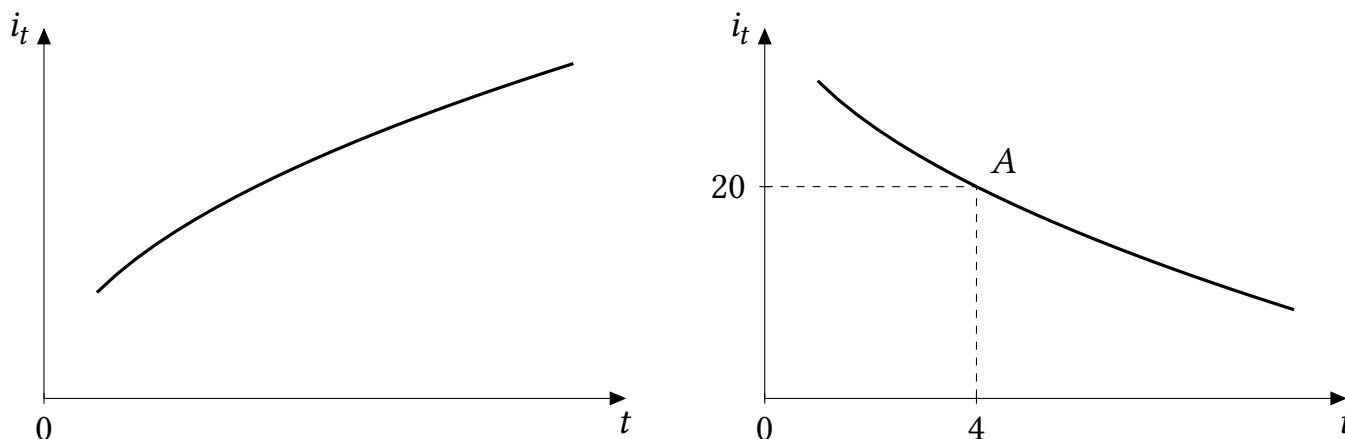
д) Максимальная оценка за пункт — 2 балла: полный балл ставится за верный ответ с пояснением, частичные баллы за пункт не предусмотрены.

е) Максимальная оценка за пункт — 2 балла, из них:

- Приведение в качестве возможного способа случайного эксперимента (или свитчбэк-тестирования) с пояснениями о том, как этот способ устроен (необязательно приводить точное название приведенного вами способа) — 2 балла за пункт.
- Приведение в качестве возможного способа использования случайного эксперимента с явными проблемами (например, предложение создать два одинаковых маркетплейса, в одном из которых запустить скидки, а в другом — не запускать) — 1 балл за пункт.
- Приведение в качестве возможного способа использования прогнозной модели — 1 балл за пункт.

Задача 3. Кривая доходности (9 класс) (12 баллов)

Кривая доходности показывает средние годовые доходности (в %) i_t в экономике в зависимости от срока t до погашения финансового актива (например, государственной облигации или депозита). Для простоты будем рассматривать в качестве активов государственные облигации. Например, точка A на графике показывает, что по облигациям на 4 года средняя годовая процентная ставка (доходность) равна 20 %.



Виды кривой доходности

В каждом пункте требуется привести по одному объяснению.

а) (3 балла) Известно, что в нормальной экономической ситуации кривая доходности возрастает (как на рисунке слева). Объясните, почему.

б) (3 балла) Обычно, если вследствие действий Центрального банка или правительства снижаются доходности краткосрочных облигаций (например, на 1 год), то снижаются и доходности долгосрочных, то есть кривая доходности сдвигается вниз целиком. Объясните, почему так происходит.

в) (2 балла) Объясните, почему сдвиг кривой доходности вниз приведет к увеличению инвестиций в реальный сектор экономики.

г) (2 балла) Иногда в данных встречается убывающая кривая доходности (как на рисунке справа). Считается, что убывающая кривая доходности является индикатором того, что скоро случится экономический кризис (как бы «предвестником» кризиса). Объясните, почему это так, при условии, что убывающая кривая доходности не является причиной кризиса сама по себе.

д) (2 балла) Убывающая кривая доходности может стать причиной проблем для бизнеса коммерческих банков. Объясните, почему.

Решение

а) Кривая доходности возрастает, для этого есть два объяснения:

- Риск-доходность. Чем больший временной промежуток мы рассматриваем, тем выше неопределенность относительно платежеспособности, выше вероятность того, что долг не будет выплачен. Эту растущую вероятность нужно компенсировать с течением времени все больше, поэтому в процентных ставках с течением времени растёт премия за риск. По этой же логике, за депозиты на более

длительный срок банки готовы предлагать более высокий процент, чтобы компенсировать тот самый риск.

- Ликвидность-доходность Чем больший временной промежуток мы рассматриваем, тем выше неопределенность относительно будущей экономической ситуации, выше вероятность того, что будет необходимо изменить распределение своих средств (а с ростом срочности возможностей по быстрому изъятию все меньше). Эту растущую вероятность нужно компенсировать с течением времени все больше, поэтому в процентных ставках с течением времени растёт премия за ликвидность.

б) Если упадут доходности по краткосрочным инструментам, а по долгосрочным они не изменятся, то у экономических агентов появляются возможности получить дополнительную прибыль в будущем, беря в долг по относительно заниженным краткосрочным ставкам, давать в долг под относительно завышенный процент. Таким образом, рынок перестаёт быть в равновесии, и экономические агенты начинают действовать в целях получения прибыли в долгосрочном периоде.

На рынке такие возможности получения прибыли, если нет никаких препятствий, нейтрализуются действиями самих агентов. И в равновесии никаких возможностей для получения гарантированной прибыли остаться не должно — отсюда и условие на его отсутствие. В рассмотренном выше примере, если многие люди начнут предъявлять спрос на краткосрочные займы и предлагать много заёмных средств на длительный срок, то по рыночному механизму процентная ставка по коротким инструментам будет расти, в какой-то момент переставая быть заниженной, а по долгосрочным будет падать, в какой-то момент переставая быть завышенной. Когда процентные ставки примут свои “справедливые” значения, то есть не будут ни завышенными, ни заниженными, возможности для получения однозначной прибыли уйдут, экономические агенты больше не будут менять свои модели поведения.

В результате, изменения краткосрочных ставок приводит к изменениям ставок долгосрочных.

в) При падении доходности финансовых активов инвестиции в реальный сектор становятся более привлекательными. (+1) В результате этого растёт предложение средств в реальный сектор, доходность в котором начинает снижаться. Больше проектов становится выгодными (NPV растёт, становится > 0), они начинают финансироваться, инвестиции увеличиваются.

Альтернативные объяснения:

- Деньги с финансового рынка могут не в полной мере направляться в инвестиции (часть из них может направляться на покупку других финансовых активов, но не в реальные проекты). Если мы изымаем часть средств с финансового рынка и целиком направляем их в реальный сектор, то предложение заёмных средств становится больше, доходность снижается. Больше проектов становится выгодными (NPV растёт, становится > 0), они начинают финансироваться, инвестиции увеличиваются.
- Снижение ставки стимулирует людей отказаться от сбережений и увеличить потребление, что ведёт к росту совокупного спроса, росту выпуска, в результате

этого доходы фирмы растут, что стимулирует их наращивать инвестиции.

г) Убывающая кривая доходности является индикатором того, что инвесторы ожидают кризиса. Вот два объяснения того, почему пессимистические ожидания инвесторов приводят к убывающей кривой доходности.

Действительно, если инвесторы имеют негативные ожидания относительно недалекого будущего, то они начнут отказываться от вложений в краткосрочные инструменты и переходить в инструменты долгосрочные, чтобы на период кризиса обезопасить свои средства. Падает спрос на краткосрочные активы и растет спрос на долгосрочные. Предложение краткосрочных и долгосрочных займов расти, как минимум, не будет. Это, в свою очередь, вызовет обвал цен активов краткосрочных и рост цен долгосрочных => доходности изменятся обратно: доходности краткосрочных инструментов вырастут, а долгосрочных упадут — и получится убывающая кривая доходности.

Когда экономические агенты ожидают рецессии, то они думают, что в будущем ЦБ для борьбы с ней, стимулируя экономику, будет снижать ключевую ставку процента, вместе с которой упадут и все остальные ставки. Также это будет верно, если ожидается снижение инфляции ниже таргета в будущем (например, в случае падения совокупного спроса), то они также могут ожидать стимулирующего воздействия на экономику со стороны ЦБ.

В итоге, есть ожидания кризиса, который приводят к инвертированной форме кривой, а негативные ожидания экономических агентов относительно будущего, как и самосбывающееся пророчество, могут и правда привести к рецессии. При негативных ожиданиях инвесторы сокращают инвестиции, сокращают производство, больше распродают из запасов, домохозяйства воздерживаются от покупки товаров длительного пользования. Все это приводит к сокращению совокупного спроса и предложения и, соответственно, к падению выпуска.

д) Инвертированная кривая доходности негативно сказывается на банковской системе, так как у банка большая часть кредитов (активов) долгосрочная, а депозиты (пассивы) краткосрочные — это основная деятельность банка, преобразование сроков жизни финансовых инструментов (*maturity transformation*). Инвертированная кривая снижает маржу банка: выгоду от долгосрочных активов в сравнении с издержками на короткие пассивы. Банк получает меньшую прибыль и может начать испытывать проблемы с ликвидностью или вообще обанкротиться.

Предположим, что экономические агенты верят в то, что инвертированная кривая доходности является предвестником кризиса. Тогда если агенты видят инвертированную кривую, они могут начать переживать за свои депозиты и начать набег на банк. Такое может произойти массово, и тогда банк вообще обанкротится. Однако даже без банкротства это негативно сказывается на бизнесе коммерческих банков.

Схема проверки

а) 3 балла за хотя бы одно верное и полное объяснение, 0 иначе. Нет объяснений про какой конкретно риск говорится в решении — 0 баллов.

б) 3 балла за верное и полное объяснение, 0 иначе.

в) Объяснено что при снижении ставки процента на финансовом рынке реальные активы становятся более привлекательными — 1 балл.

Объяснено что рост предложения заемных средств -> снижение ставки -> рост инвестиций — 1 балл.

г) 2 балла за верное и полное объяснение, 0 иначе. Полное объяснение должно быть построено по принципу «два следствия одной причины».

Оценивалось в 0 баллов, в том числе:

1. Если в решении предполагается, что государство объявляет кривую доходности
2. Не различаются потребление и инвестиции
3. Нет объяснения откуда берутся ожидания
4. Если сама кривая является причиной кризиса
5. Если долговой/финансовый кризис приравнивается к экономическому

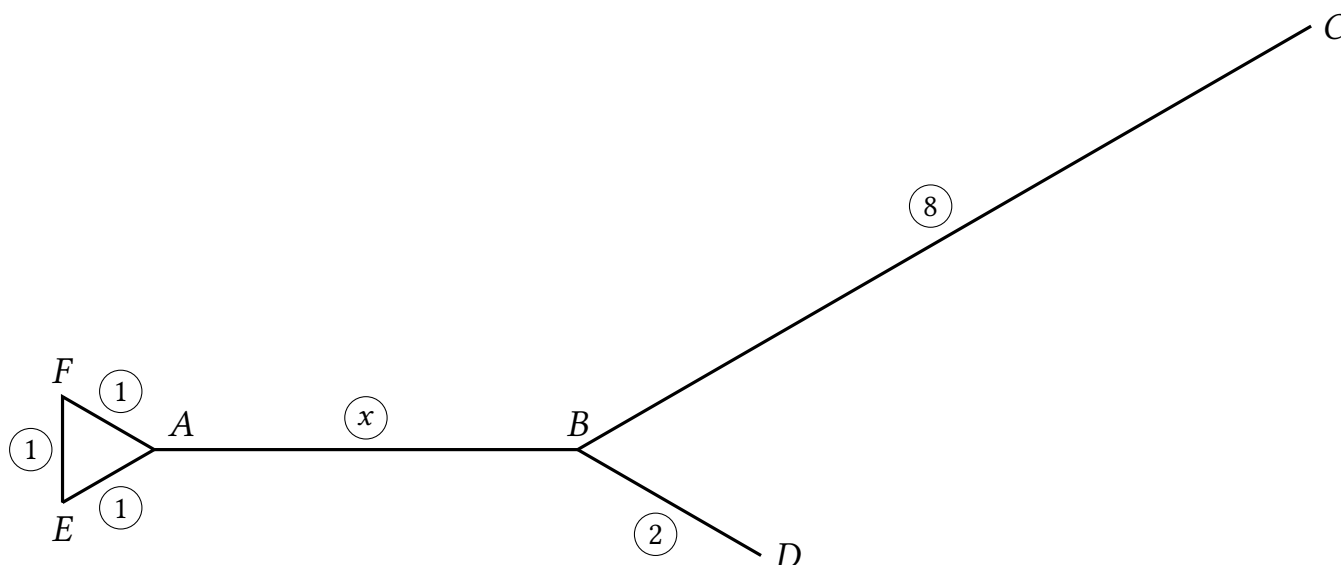
д) 2 балла за верное и полное объяснение, 0 иначе.

Оценивалось в 0 баллов, в том числе:

1. Если в решении предполагается, что государство объявляет убывающую кривую доходности
2. Если предполагается, что ставка по депозитам не меняется вместе со ставкой по облигациям

Задача 4. Магазины в поселке**(12 баллов)**

Сеть дорог в поселке Крутышка имеет следующий вид:



Обведенные цифры рядом с отрезками обозначают их длину в километрах (x — переменная величина, необязательно нарисованная в масштабе).

Жители поселка живут вдоль дорог равномерно¹, число жителей велико. Жители могут передвигаться только по дорогам.

Изначально в поселке нет ни одного магазина. На рынок данного поселка готовы выйти две фирмы — ООО «Лидер» и ООО «Последователь». Их взаимодействие устроено следующим образом. Сначала ООО «Лидер» выбирает, где (вплотную к дороге) расположить свой магазин, а затем ООО «Последователь», наблюдая, где разместил магазин «Лидер», решает, где (вплотную к дороге) расположить свой магазин.

После того как местоположение магазинов выбрано, каждый потребитель отправляется в ближайший к нему — с точки зрения расстояния вдоль дорог — магазин (цены и ассортимент в магазинах одинаковые). Если магазины находятся на равном расстоянии от потребителя, он отправляется в магазин фирмы «Лидер». Не идти в магазин потребитель не может. Считаем, что фирмы могут расположить магазины очень близко друг к другу, так что между магазинами нет потребителей. В этом случае будем говорить, что магазины находятся «впритык». Разместить магазины прямо в одной точке фирмы не могут.

Каждая фирма максимизирует долю потребителей, которые приходят в ее магазин (рыночную долю).

а) (3 балла) Пусть $x = 9$. Определите, где разместит свой магазин фирма «Лидер» (принимается описательный ответ вида «на участке MN на расстоянии k от точки N »).

б) (9 баллов) Для каждого $x > 0$ определите, где разместит магазин фирма «Лидер», и рыночную долю «Лидера» при этом размещении. При каком значении x рыночная доля «Лидера» будет максимальна?

¹Это означает, что для любого отрезка доля жителей поселка, живущих на нем, равна отношению длины этого отрезка к суммарной длине всех дорог.

Решение

Для более краткого решения задачи полезно сделать следующее наблюдение. Чтобы доказать, что лидер выберет некую точку x_1^* , нам необязательно находить наилучший ответ последователя $x_2^*(x_1)$ для любого действия лидера x_1 ; достаточно найти лишь *какое-то* действие последователя \hat{x}_2 , что лидеру хуже при $x_1 = \hat{x}_1$, $x_2 = \hat{x}_2$, чем при $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*(x_1)$. Все дело в том, что *данная игра является игрой с фиксированной суммой (сумма рыночных долей фирм всегда равна 1)*, и поэтому чем лучше последователю, тем хуже лидеру. Если уже при каком-то возможном ответе последователя \hat{x}_2 на действие \hat{x}_1 лидеру невыгодно отклоняться от точки x_1^* в точку \hat{x}_1 , то при *наилучшем* для последователя ответе $x_2^*(\hat{x}_1)$ лидеру тем более нет смысла отклоняться, потому что ему будет еще хуже, ведь последователю будет лучше.

а) Лидер встанет на отрезке АВ на расстоянии 1 от точки В (назовем эту точку x_1). При таком расположении как справа, так и слева от лидера будет одинаковая суммарная длина отрезков (по $(3+9+8+2)/2 = 11$). Заметим, что тогда рыночная доля лидера будет $1/2$, ведь своим оптимальным ответом последователь встанет вплоты к лидеру слева или справа, и ровно половина потребителей пойдет в каждый из магазинов.

Теперь докажем, что при любом другом расположении лидер получит меньшую долю потребителей. Если он встанет в любую другую точку, то последователь, встав в точку x_1 , получит рыночную долю больше $1/2$ (получит всех потребителей на «своем» фланге, и еще некоторых между ним и лидером), а значит, лидер получит меньше $1/2$ (а при оптимальном действии последователя лидер получит еще меньше, см. общее рассуждение перед решением). Поэтому лидер не отклонится от точки x_1 .

Ответ: лидер встанет в точку, находящуюся АВ на расстоянии 1 от точки В.

б) Идея решения основана на следующем наблюдении. От точки В отходит три «отростка» (BC, BD и BA-FE). Если на одном из них находится точка, с обеих сторон от которой находится ровно по половине всех покупателей, то в нее и встанет лидер (по аналогии с пунктом а)). Если же ни на одном из них нет такой точки (что происходит, если нет отростка, который длиннее, чем сумма двух других), то естественным кандидатом на позицию лидера является сама точка В («перекресток»). Рассуждения ниже показывают, что эта интуиция верна.

При этом оказывается, что в силу того, что длины сторон треугольника AFE малы, он не играет специальной роли в анализе (достаточно учитывать сумму длин его сторон). В частности, точка А никогда не играет той же роли, что и точка В.

Общая длина всех отрезков равна $3+x+8+2 = 13+x$. Половина рынка соответствует длине $(13+x)/2$. Точка, слева и справа от которой по половине потребителей:

- никогда не находится на BD, потому что $(13+x)/2 > 2$;
- находится на BC при $(13+x)/2 < 8$, то есть при $x < 3$;
- находится на АВ при $3 < (13+x)/2 < 3+x$, то есть $x > 7$.

Поэтому имеет смысл рассмотреть три случая: 1) $x < 3$; 2) $3 \leq x \leq 7$; 3) $x > 7$.

1. $x < 3$. На отрезке BC находится точка, слева и справа от которой по половине потребителей. Это точка y_1 , находящаяся на BC на расстоянии $(3-x)/2$ от точки В. Докажем, что лидер встанет именно в эту точку. Если он встанет в нее, последователь встанет вплоты справа или слева от лидера, и лидер получит

половину потребителей. Если же лидер встанет в любую другую точку, то последователь, встав в y_1 , получит строго больше половины потребителей (логика та же, что в а)), а значит, лидер получит меньше половины. Поэтому лидер не будет отклоняться от y_1 . В итоге доля лидера будет равна $1/2$.

2. $3 \leq x \leq 7$. Докажем, что лидер встанет ровно в точку В (на «перекрестке»). Действительно, если он встанет в точку В, то в сторону точки С от него будет длина 8 потребителей, в сторону точки D от него будет длина 2 потребителей, в сторону точки А от него будет длина $x + 3$ потребителей (включая треугольник AFE). Оптимальный ответ последователя зависит от x :

- при $x + 3 < 8$, то есть $x < 5$, последователь встанет вплотную к лидеру на отрезке ВС, потому что там потребителей больше всего. Значит, лидер, встав в В, получит общую длину $2 + 3 + x = 5 + x$ (и долю $(5 + x)/(13 + x)$).
- при $x + 3 > 8$, то есть $x > 5$, последователь встанет вплотную к лидеру на отрезке АВ, потому что там потребителей больше всего. Значит, лидер, встав в В, получит общую длину $2 + 8 = 10$ (и долю $10/(13 + x)$).
- при $x = 5$ последователь может выбрать любой из двух вариантов выше, они для него равнозначны, и лидеру тоже безразлично, куда именно встанет последователь.

Докажем, что лидеру невыгодно отклоняться от точки В.

- При $x < 5$ самый длинный отросток — ВС, и достаточно доказать, что не выгодно отклоняться на него (отклонения на более короткие отростки только хуже). Если лидер отклонится на ВС, то если последователь сам встанет в точку В, то лидер получит длину меньше 8, а до отклонения он получал $5 + x \geq 8$, значит, отклоняться невыгодно.
 - Аналогично, при $x > 5$ самый длинный отросток — ВА-FE, достаточно доказать, что не выгодно отклоняться на него (отклонения на более короткие отростки только хуже). Если лидер отклонится на ВА-FE, то если последователь сам встанет в точку В, то лидер получит длину меньше $3 + x$, а до отклонения он получал $10 \geq 3 + x$, значит, отклоняться невыгодно.
 - при $x = 5$ оба этих аргумента работают.
3. $x > 7$. На отрезке АВ находится точка, слева и справа от которой по половине потребителей. Это точка z_1 , находящаяся на АВ на расстоянии $(x - 7)/2$ от точки В. Докажем, что лидер встанет именно в эту точку. Если он встанет в нее, последователь встанет вплотную справа или слева от лидера, и лидер получит половину потребителей. Если же лидер встанет в любую другую точку, то последователь, встав в z_1 , получит строго больше половины потребителей (логика та же, что в а)), а значит, лидер получит меньше половины. Поэтому лидер не будет отклоняться от z_1 . В итоге доля лидера снова будет равна $1/2$.

Подытоживая, получаем, что доля лидера как функция от x будет иметь вид

$$s_1(x) = \begin{cases} 1/2, & x < 3; \\ \frac{5+x}{13+x}, & 3 \leq x < 5; \\ \frac{10}{13+x}, & 5 \leq x < 7; \\ 1/2, & x \geq 7. \end{cases} \quad (4.1)$$

Легко видеть, что эта функция максимальна при $x = 5$, потому что функция $(5 + x)/(13 + x) = 1 - 8/(13 + x)$ возрастает, а функция $10/(13 + x)$ убывает.

Ответ: «Лидер» разместит свой магазин:

- на отрезке BC на расстоянии $(3 - x)/2$ от точки B при $x < 3$;
- в точке B при $3 \leq x \leq 7$;
- на отрезке AB на расстоянии $(x - 7)/2$ от точки B при $x > 7$.

Рыночная доля лидера дана в уравнении (4.1). Она максимальна при $x = 5$.

Схема проверки

- а) • Нет решения пункта а) (в том числе, если есть полное решение пункта б), но нет отдельного ответа на вопрос из пункта а) под соответствующей литерой) — **0 баллов**
- Только правильный ответ — **1 балл**
 - Арифметическая ошибка при решении выписанного уравнения для точки на отрезке AB — **2 балла**
- б) • **1 балл** за правильно найденную точку максимума доли *Лидера*. Если из-за арифметической ошибки при вычислении отдельных долей максимум найден неправильно, это **0 баллов**.
- Оставшиеся 8 баллов делятся на 4 участка параметров ($x > 7$, $x \in [5,7]$, $x \in [3,5]$, $x \in (0,3)$) по 2 балла каждый: по 1 баллу за позицию лидера и долю лидера
 - Отсутствие объяснения оптимальности точки B или точки на AB или точки на BC в соответствующем пункте — минус 1 балл (отсутствие сравнения оптимума с треугольником и BD при наличии сравнения точки B и точки на AB прощалось)
 - Пример: найдена точка лидера без объяснения, но нет доли: $+1 + 0 - 1 = 0$ баллов
 - В ответах на вопрос о доле фигурирует количество потребителей, а не доля — минус 1 балл один раз на всю задачу