

## Второй тур

### Задача 5. Вредная газировка

(12 баллов)

Как вы знаете из одного из заданий регионального этапа, с 1 июля 2023 года в России введен акциз на сладкие напитки. В данной задаче мы предлагаем вам с помощью модели разобраться, как можно определять оптимальную ставку таких налогов.

Представим себе экономику, населенную 100 потребителями. Функция полезности каждого потребителя имеет вид  $U = 120q - 3q^2/2 - pq - v(q)$ , где  $q$  — количество выпитой газировки,  $p$  — ее цена для потребителя,  $v(q) = q^2/2$  — долгосрочный вред здоровью от газировки. Вред от газировки есть в любом случае, но потребитель может как осознавать, так и не осознавать его. Если потребитель не осознает наличие вреда от газировки, он не знает о том, что в его полезности есть слагаемое « $-v(q)$ » (все остальные слагаемые ему известны в любом случае).

Рынок газировки является совершенно конкурентным. Средние издержки фирм постоянны и равны 20. Определим истинное общественное благосостояние как сумму полезности потребителей (с учетом вреда от газировки, который есть в любом случае) и поступлений в бюджет<sup>2</sup>. Государство максимизирует истинное общественное благосостояние.

а) (2 балла) Найдите функцию спроса одного потребителя на газировку  $q_d(p)$  в двух случаях: (1) если потребитель осознает вред от газировки и (2) если не осознает.

б) (9 баллов) Государство может ввести потоварный налог на производителей газировки по ставке  $t$ . Определите оптимальную для государства ставку потоварного налога  $t^*$  в следующих случаях:

- 1) все потребители осознают вред от газировки;
- 2) ни один потребитель не осознает вред от газировки;
- 3) 50 потребителей осознают вред от газировки, а остальные 50 — не осознают.

в) (1 балл) Логика введения налога в данной ситуации похожа на логику введения налога в одной из классических тем экономической науки. Назовите эту тему. Пояснение не требуется.

### Решение

а) Если потребитель осознает вред от газировки, он максимизирует свою истинную полезность

$$U_{true}(q) = 120q - 3q^2/2 - pq - q^2/2 = (120 - p)q - 2q^2 \rightarrow \max_q.$$

Функция полезности квадратична, оптимум находится в вершине параболы с ветвями вниз,  $q^* = (120 - p)/4 = 30 - p/4$ . Это и есть искомая функция спроса  $q_d(p)$

Если же потребитель не осознает вред от газировки, то он максимизирует «полезность»

$$U_{false}(q) = 120q - 3q^2/2 - pq = (120 - p)q - 3q^2/2 \rightarrow \max_q,$$

<sup>2</sup>Участник заключительного этапа без труда определит, что в данном случае в равновесии прибыль фирм равна нулю, и поэтому ее можно не учитывать.

откуда  $q_d(p) = q^*(p) = (120 - p)/3 = 40 - p/3$ .

Ответ: если осознает, то  $q_d(p) = 30 - p/4$ , а если не осознает, то  $q_d(p) = 40 - p/3$ .

Примечание: Мы получили, что потребители, не осознающие вред от газировки, предъявляют более высокий спрос на нее — все логично.

б) Пусть все потребители осознают вред от газировки. Поскольку информация полна, рынок газировки совершенно конкурентный, внешние эффекты отсутствуют, при невмешательстве государства общественное благосостояние максимально, а любой положительный налог приведет к DWL. Значит, оптимальная ставка налога  $t^*$  равна 0.

Это можно проверить формально.

Поскольку средние издержки постоянны и равны 20, при введении налога по ставке  $t$  равновесная цена для потребителя будет равна  $p = 20 + t$ . Поскольку все потребители одинаковы, они выберут один и тот же объем потребления  $q$ . Запишем истинное общественное благосостояние как функцию от этого объема:

$$W(q) = 100(120q - 3q^2/2 - (20 + t)q - q^2/2 + tq) = 100(100q - 2q^2).$$

Его можно сразу максимизировать по  $q$  или сначала подставить  $q = q_d(p) = 30 - p/4 = 30 - (20 + t)/4$  и максимизировать по ставке налога  $t$ . Первый путь проще: оптимальный объем потребления  $q^*$  равен  $100/4 = 25$ . Он достигается при ставке  $t$  такой, что  $q_d(20 + t) = 25$ , то есть  $30 - (20 + t)/4 = 25$ , откуда  $t = 0$ .

Таким образом, несмотря на вред от газировки, в этом случае государство вмешиваться не должно. Потребители и так полностью учитывают этот вред при принятии решений.

Теперь допустим, что ни один из потребителей не осознает вред от газировки. Поскольку все потребители одинаковы, они выберут один и тот же объем потребления  $q$ . Функция истинного благосостояния имеет тот же вид, что и выше:

$$W(q) = 100(100q - 2q^2).$$

Оно по-прежнему максимально при  $q = 25$ . Отличие в том, что теперь спрос потребителей другой ( $q_d(p) = 40 - p/3$ ), и чтобы достичь этого объема, нужно будет ввести налог. А именно, налог  $t$  должен удовлетворять уравнению  $q_d(20 + t) = 25$ ,  $40 - (20 + t)/3 = 25$ , откуда  $t^* = 25$ . Этот случай также можно решить максимизацией по  $t$ .

Наконец, пусть только 50 потребителей осознают вред от газировки. Осознающий и не осознающий вред потребители выберут *разные* объемы потребления  $q_1$  и  $q_2$ , тогда благосостояние будет равно

$$W(q_1, q_2) = 50(100q_1 - 2q_1^2) + 50(100q_2 - 2q_2^2)$$

Его не нужно максимизировать отдельно по  $q_1$  и по  $q_2$ , потому что объемы  $q_1$  и  $q_2$  связаны через ставку налога. При ставке налога  $t$

$$q_1(t) = 30 - (20 + t)/4 = (100 - t)/4;$$

$$q_2(t) = 40 - (20 + t)/3 = (100 - t)/3.$$

Подставляя эти значения в функцию благосостояния, получаем, что как функция от ставки налога благосостояние имеет вид

$$W(t) = 50(100(100 - t)/4 - 2(100 - t)^2/16) + 50(100(100 - t)/3 - 2(100 - t)^2/9).$$

По  $t$  эта функция квадратична, ветви параболы направлены вниз. Максимизируя ее (для удобства можно сделать замену  $x = 100 - t$ ), получаем  $t^* = 16$ .

Ответ: 1)  $t^* = 0$ ; 2)  $t^* = 25$ ; 3)  $t^* = 16$ .

**Примечание:** мы получили, что чем больше потребителей осознают вред от газировки, тем меньше должен быть налог, что также логично.

в) Ответ: Внешние эффекты (экстерналии).

**Примечание:** если в экономике есть отрицательный внешний эффект, то экономический агент А своими действиями отрицательно влияет на другого экономического агента Б, но не учитывает этого при принятии решений, в результате чего с точки зрения общества объем деятельности А избыточен. Государство может скорректировать эту неэффективность, введя налог на деятельность агента А.

Здесь же агент А своими действиями отрицательно влияет на экономического агента А (самого себя), но не учитывает этого при принятии решений, в результате чего с точки зрения общества объем деятельности (в данном случае, потребления) агента А избыточен. Государство может скорректировать эту неэффективность, введя налог на потребление агента А.

Таким образом, ситуация аналогична ситуации с внешним эффектом, но этот эффект не внешний, а внутренний (но не осознаваемый). По аналогии со словом *экстерналия* (от англ. *external* — «внешний»), которым также называют внешний эффект, такой внутренний, но не осознаваемый эффект называется *интерналия* (от англ. *internal* — «внутренний»). Интерналия — это как бы экстерналия на самого себя. Тема интерналий и их регулирования является частью *поведенческой экономики*, области экономической науки, изучающей не вполне рациональное поведение людей.

### Схема проверки

а) По 1 баллу за каждую полностью правильную функцию спроса. При арифметических ошибках баллы не ставились.

б) Если участник в каком-либо из трех случаев 1-3 максимизирует благосостояние по  $t$ , то ему за этот случай ставится:

1. 2 балла за функцию благосостояния  $W(t)$  для данного случая.
2. 1 балл за нахождение ее точки максимума.

Если участник в случаях 1-2 максимизирует благосостояние по  $q$  (в случае 3 это невозможно), то ставится:

1. по 2 балла за вывод функции благосостояния  $W(q)$ .
2. 1 балл за нахождение ставки налога  $t^* = 0$ , при которой количество равно 25 в случае 1;
3. 1 балл за нахождение ставки налога  $t^* = 25$ , при которой количество равно 25 в случае 2;

Если участник решает случай 1 без вычислений (получает  $t^* = 0$ ), ссылаясь на общий результат об эффективности при совершенной конкуренции, то ему ставится **3 балла** за эту часть.

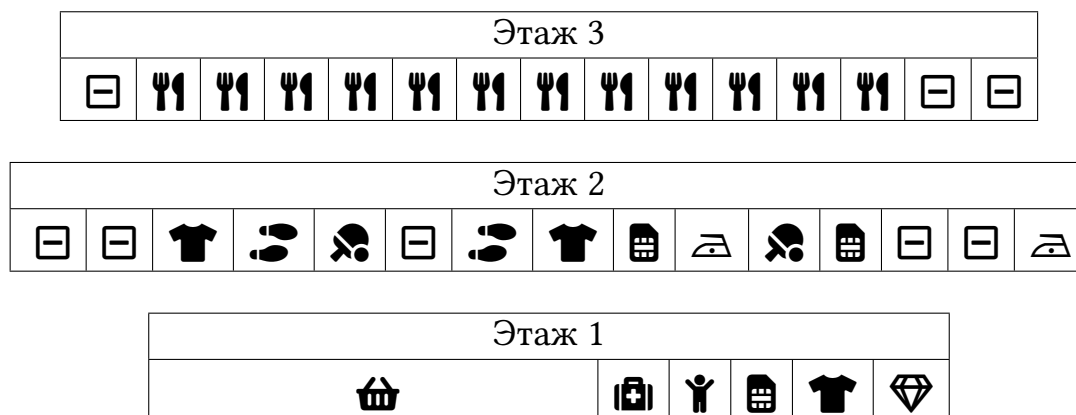
Если в случаях 2 и 3 допущена ошибка, то снимается **1 балл** за хотя бы одну арифметическую ошибку и еще **1 балл**, если эта ошибка привела к ситуации, что налог в третьем случае оказался выше, чем во втором, или другой подобной ситуации, противоречащей экономическому смыслу.

Если при выводе функции благосостояния  $W(q)$  или  $W(t)$  не учтена важная составляющая (например, налоги или  $v(q)$ ), то ставится **0 баллов**. Если была ошибка подсчета (часть слагаемых умножалась на 100, часть нет), то ставится **1 балл**. Если не было доведено до функции одной переменной, то тоже ставится **1 балл**.

**в) 1 балл** за верно указанную тему «Внешние эффекты» («Экстерналии», «Налоги Пигу»). В случае наличия также противоречивой темы, не связанной с задачей («Монополия», «Международная торговля» и др.), ставится **0 баллов** независимо от наличия правильного ответа.

**Задача 6. Устройство торгового центра****(12 баллов)**

Девочка Даша регулярно посещает один торговый центр и удивляется странным, с ее точки зрения, принципам его устройства. В этот раз Даша, придя в торговый центр, перерисовала его схему:



На схеме одна ячейка соответствует одному магазину, ширина ячейки — ширине соответствующего магазина. ☐ — свободная площадь; 🍴 — кафе с местами на общем фудкорте; 👕 — магазин одежды; 👟 — магазин обуви; 🏃 — спортивный магазин; 📱 — салон связи; 🏠 — бытовая техника; 💎 — ювелирный магазин; 🏠 — аптека; 👤 — бесплатная детская комната; 🛒 — продуктовый супермаркет.

Даша села на лавочке и задумалась. Ниже приведены ее вопросы и размышления о разных аспектах устройства торгового центра. Помогите Даше найти экономические аргументы, отвечающие на ее вопросы, а также оцените сделанные ей предположения и выданные советы.

В решении выделите на каждый аргумент новый абзац и начинайте его с символа «•». В каждом пункте будут оцениваться только первые написанные  $n + 1$  аргументов, где  $n$  — максимальное число баллов за этот пункт. Каждый положительно оцененный аргумент (и критика соображений Даши, и ответы на ее вопросы) будет добавлять 1 балл до набора максимально возможного балла за соответствующий пункт.

а) (1 балл) «Бесплатная детская комната — зачем она торговому центру? Это какая-то благотворительность, без которой администрация вполне могла бы обойтись».

б) (3 балла) «Почему в этом торговом центре так много свободных площадей? Казалось бы, администрации центра выгодно снизить арендную плату до того уровня, когда фирмам станет выгодно арендовать площадь под магазины. Администрация торгового центра ведет себя нерационально и теряет прибыль».

в) (2 балла) «Интересно, почему все кафе расположены рядом друг с другом? Казалось бы, так они активнее конкурируют между собой и эта конкуренция заставляет сбивать цены на еду. На месте владельцев я бы старалась искать площади в других местах города, где нет такой конкуренции».

г) (2 балла) «Интересно, почему супермаркет не только в этом торговом центре, но и во многих других расположен на первом этаже? Супермаркет нужен многим посетителям, и расположение его на верхних этажах могло бы заставить их ознакомиться с ассортиментом других магазинов, пока они идут до супермаркета».

д) (2 балла) «Интересно, почему в супермаркете такие низкие цены? Вряд ли он так окупает высокую арендную плату, которую требует с такого крупного арендатора торговый центр. Супермаркет принадлежит известной сети и может позволить себе поднять цены без потери существенной доли покупателей».

е) (2 балла) «Еще любопытно, почему кафе в торговом центре много, а супермаркет только один? Наверно, администрация других супермаркетов просто не знает про существование этого торгового центра. Им стоит лучше изучать рынок».

### Решение

а) Если бы не было детских комнат, некоторые семьи могли бы отказаться от похода в торговый центр, так как с маленькими детьми сложнее заниматься покупками. Соответственно, торговому центру выгоднее сделать детскую комнату, чем лишиться части клиентов.

- б)
- Из-за маленького потока покупателей фирмам может быть невыгодно арендовать площади даже по очень низкой цене: доходы могут не покрыть расходы на зарплату продавцам, логистику и другие издержки. Одновременно торговый центр не может сдать в аренду площади по очень низкой цене из-за расходов, связанных со сдачей (услуги юристов и т.п.) и обслуживанием помещения.
  - Иметь свободные площади «про запас» может быть разумной стратегией максимизации долгосрочной прибыли: вместо сдачи по низкой цене первому попавшемуся арендатору, ТЦ может ждать более платежеспособного и «держат» под него свободную площадь.
  - Если ТЦ из-за регулирования не может сдавать разные квадратные метры по разным ценам, то для максимизации выручки (прибыли) может быть неоптимально сдавать все площади.

- в)
- Благодаря общему фудкорту, получается более эффективно использовать площадь: столики на фудкорте общие, их занимают посетители тех кафе, на которые в каждый момент больше спрос.
  - Выигрыш достигается, потому что в торговом центре есть поток клиентов, которые приходят поесть между покупками, а не с целью поесть в конкретном кафе. Соответственно, кафе получает поток разнообразных клиентов, а не только тех, кто идет именно в это кафе.
  - Кухня в разных кафе разная (русская и грузинская, итальянская и вьетнамская и т.д.), что снижает интенсивность конкуренции между ними.
  - От кафе есть отрицательная экстерналия на другие магазины. Поэтому они вынужденно по решению руководства ТЦ концентрируются в одном месте.

- г)
- Это удобно для посетителей: возить тяжелые тележки из супермаркета гораздо проще, если он находится на уровне выхода из ТЦ (и близко к парковке, которая либо на улице, либо на один этаж ниже первого). Это особенно важно для пожилых покупателей и покупателей с ограниченными возможностями. Таким образом, благодаря политике размещения супермаркета на 1 этаже супермаркет расширяет контингент покупателей.
  - Супермаркет также выигрывает от такого расположения, потому что экономит

на услугах грузчиков.

- д) • Арендная плата для супермаркета необязательно высокая, поскольку торговый центр очень заинтересован в его наличии (он является так называемым «якорным арендатором» — многие покупатели приезжают в ТЦ в первую очередь в супермаркет, а заодно посещают и другие магазины и кафе), поэтому в переговорах о стоимости аренды у супермаркета высокая переговорная сила.
- Супермаркет в этом ТЦ большой, а значительная часть его издержек — фиксированная (арендная плата, электричество, зарплата охранников и т.д.). Такая ситуация создает экономию на масштабе продаж, что позволяет супермаркету устанавливать низкие цены на отдельные единицы продукции и не работать в убыток.
- е) • Кафе предлагают дифференцированную еду, а супермаркеты предлагают одни и те же товары. В последней ситуации конкуренция может быть строго невыгодной.
- Во-вторых, супермаркет занимает большую площадь, а найти место для двух супермаркетов может быть тяжело.
  - В-третьих, с точки зрения торгового центра второй супермаркет не сгенерирует приток новых клиентов, поэтому торговый центр может быть заинтересован в диверсификации магазинов.

### *Схема проверки*

Схема проверки этой задачи фактически описана в условии.

В пункте б) любые аргументы с альтернативным использованием площадей для посетителей не учитывались.

В пункте г) неспецифичные аргументы, подходящие и для супермаркета, и для условного магазина одежды, не засчитывались.

В пункте д) аргументы, касающиеся узких групп посетителей (посетители, покупающие перекус, посетители в мексиканских шляпах и т.д.), не засчитывались.

**Задача 7. Мигранты****(12 баллов)**

Страна А занимает небольшой остров в составе архипелага. Спрос и предложение труда в этой стране задаются уравнениями  $L_a^d = 100 - w$  и  $L_a^s = w$  соответственно, где  $w$  — зарплата в месяц (в тыс. д.е.), а  $L$  — количество работников (в тыс. человек). На других островах архипелага есть 1 млн работников, готовых приплыть на остров и трудиться за зарплату  $w_f = 30$  тыс. д.е. в месяц. Труд отечественных работников и иностранцев для фирм полностью взаимозаменяем.

а) (3 балла) Сколько отечественных и иностранных работников будут заняты в стране А в условиях свободного перемещения рабочей силы? Проиллюстрируйте ситуацию на графике спроса и предложения труда, аккуратно подписав все линии и отметив равновесие.

б) (4 балла) Правительство страны А решило обязать фирмы платить отечественным работникам зарплату не менее 50 тыс. д.е. в месяц. При этом фирме можно нанимать иностранцев только в том случае, если все отечественные работники, готовые работать за эту зарплату, уже трудоустроены. На иностранных работников это правило не распространяется, их можно по-прежнему нанимать за зарплату 30 тыс. д.е. в месяц в любом количестве. Сколько отечественных и иностранных работников будут заняты в стране А, по каким зарплатам? В какую сторону изменится совокупное благосостояние отечественных работников в стране А по сравнению с ситуацией пункта а)? Отечественных фирм?

в) (5 баллов) Узнав о мере, которую ввело правительство в пункте б), 20 тыс. иностранных работников переехали в страну А навсегда и получили ее гражданство, став отечественными работниками. Они по-прежнему готовы работать за зарплату не менее 30 тыс. д.е., но от более высокой зарплаты также не откажутся. Правила, введенные в п. б), продолжают действовать. Сколько отечественных и иностранных работников будут заняты в стране А?

**Решение**

а) В равновесии без миграции зарплата вычисляется из уравнения  $100 - w = w$  и равна  $w_a = 50$  тыс. д.е. Конкуренция с иностранными работниками, которые готовы работать по 30 тыс. д.е., снизит зарплату в стране до этого уровня. При таком уровне зарплаты работать согласятся 30 тыс. отечественных работников, а величина спроса на труд отечественных фирм составит 70 тыс. сотрудников. Таким образом, в страну приедут 40 тыс. иностранцев. Иллюстрация равновесия на рис. 7.1 слева.

б) В новой ситуации равновесие пункта а) сохраниться не может — в нем отечественные работники были наняты по зарплате 30 тыс. д.е., что теперь запрещено. При этом 50 — это равновесная зарплата при отсутствии миграции, то есть по такой зарплате готовы трудиться ровно столько же отечественных работников, сколько фирмы готовы нанять. Это и произойдет.

При этом после полного удовлетворения спроса по зарплате 50 тыс. д.е. отечественными работниками фирмы готовы нанимать иностранных работников с зарплатой 30 тыс. д.е. Как видно на графике (рис. 7.1 справа), величина остаточного спроса при цене 30 тыс. д.е. составляет 20 тыс. работников. Именно столько иностранцев бу-



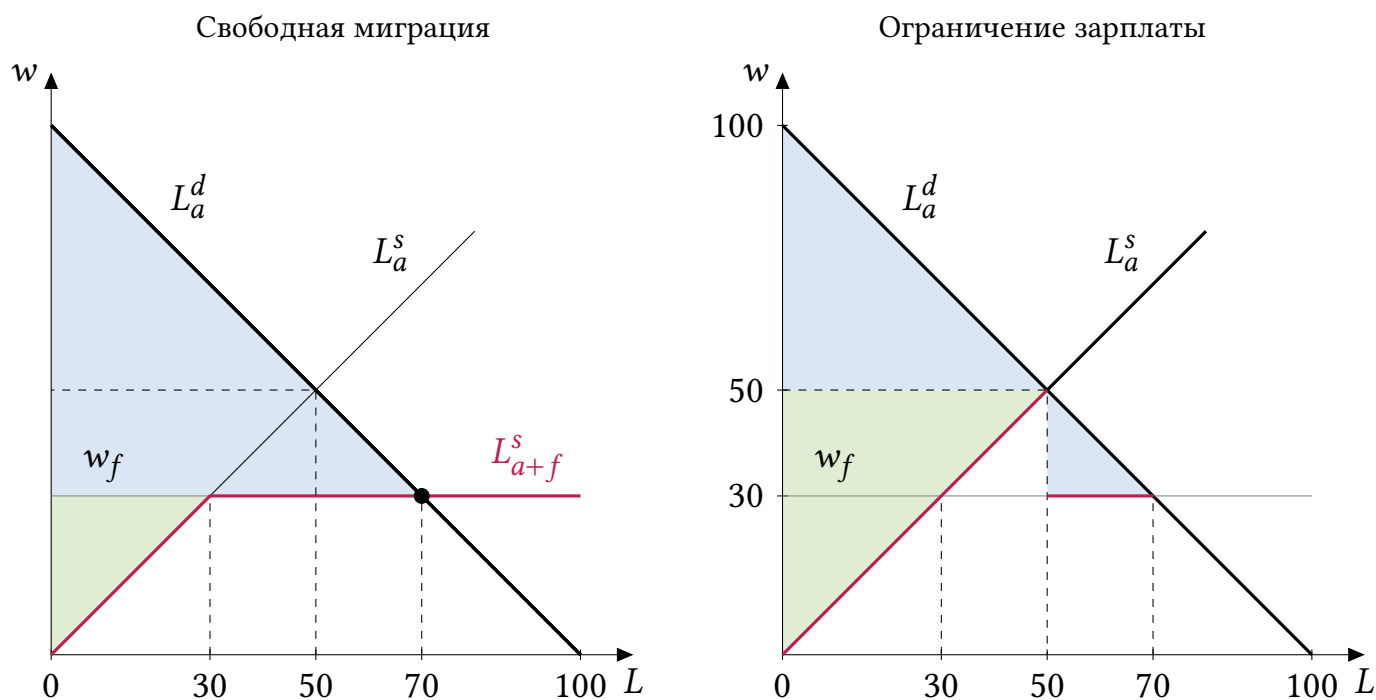


Рис. 7.1: Ситуация на рынке в условиях свободной миграции и при ограничении зарплаты отечественных работников

дет нанято.

По сравнению с пунктом а) нанято больше отечественных работников, их зарплата также выросла, поэтому их благосостояние увеличилось. Что касается фирм, они нанимают 70 тыс. работников, как и прежде, но если раньше они нанимали всех по зарплате 30 тыс. д.е., то теперь вынуждены платить некоторым зарплату 50 тыс. д.е., так что их благосостояние (прибыль) снизилось.

Величины излишков фирм (синие области) и работников (зеленые области) показаны в обоих случаях на рис. 7.1. Величины излишков равны:

	В пункте а)	В пункте б)
Излишек фирм	2450	1450
Излишек работников	450	1250

в) Предложение труда сдвинется вправо на 20 тыс. при  $w \geq 30$  тыс. д.е. и примет при таких зарплатах вид  $L_a^s = w + 20$ . Отечественные работники могут наниматься по зарплате не ниже 50 д.е., но при такой зарплате величина предложения труда (70 тыс. работников) превышает величину спроса на труд (50 тыс. работников). Ситуация проиллюстрирована на рис. 7.2. Таким образом, снова будет нанято 50 тыс. отечественных работников, а 20 тыс. отечественных работников, согласных на зарплату 50 тыс. д.е., останутся безработными. Иностранцев нанять будет нельзя.

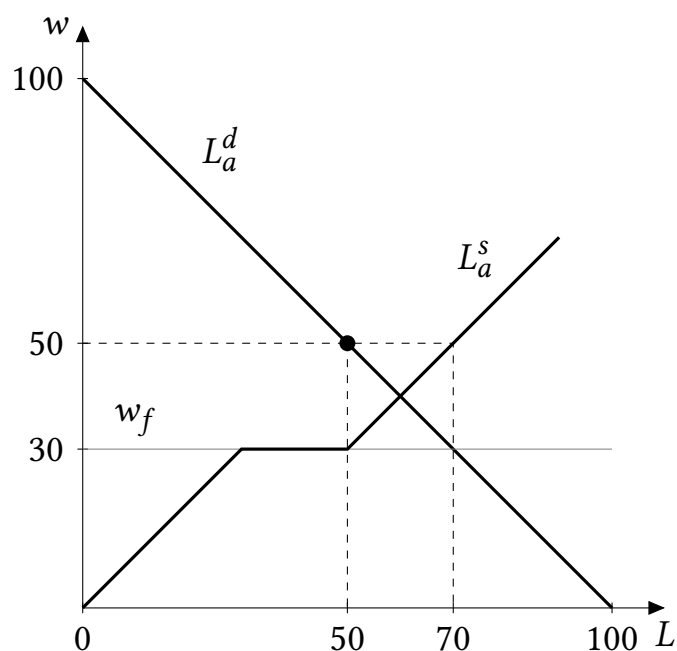


Рис. 7.2: Ситуация на рынке после иммиграции при ограничении заработной платы отечественных работников

### Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — 3 балла, из них:

- идея, что у отечественных и иностранных работников должна сложиться одинаковая зарплата (даже если явно не сформулирована, но используется в решении) — 1 балл;
- нахождение числа отечественных и иностранных работников — 1 балл;
- график — 1 балл.

Для полного балла обозначение излишков (заштрихованных областей) на графике не требуется.

б) Максимальная оценка за пункт — 4 балла, из них:

- определение числа нанятых отечественных работников и их зарплаты — 1 балл;
- определение числа нанятых иностранных работников и их зарплаты — 1 балл;
- рассуждение и ответ про благосостояние отечественных работников — 1 балл;
- рассуждение и ответ про благосостояние отечественных фирм — 1 балл.

Для полного балла в этом пункте иллюстрация и расчет излишков не требуются; для изменения благосостояния достаточно интуитивного объяснения. Тем не менее, если участник использует расчеты для анализа благосостояния, то расчеты должны быть корректными. Если хотя бы одно из сравниваемых чисел рассчитано неверным способом или с ошибкой, то балл за анализ соответствующего благосостояния не ставится.

в) Максимальная оценка за пункт — 5 баллов, из них:

- новая функция предложения при  $w \geq 30$  — 1 балл (в том числе если правильная функция не выписана в явном виде, но изображена на графике или с очевидностью используется в решении);
- определение числа нанятых отечественных работников — 2 балла;

- 1 балл, если правильный ответ получен без анализа ситуации на рынке, а только исходя из идеи «граждан страны А стало больше, поэтому их наймут не меньше, чем в б), а именно столько же»;
- определение числа нанятых иностранных работников — 2 балла;
  - 1 балл, если нулевая занятость иностранцев объяснена не наличием безработных граждан страны А, а отсутствием спроса на их труд со стороны фирм.

Для полного балла в этом пункте иллюстрация не требуется.

**Задача 8. От ВВП к КПВ***(12 баллов)*

В мире, где могут производиться только товары  $X$  и  $Y$ , страна Альфа является малой открытой экономикой, то есть может покупать и продавать любое количество этих товаров по фиксированным ценам. Мировой валютой является международный тугрик (м.т.). Мировая цена товара  $X$  равна  $p$  м.т., а мировая цена товара  $Y$  равна 1 м.т. В разное время значение  $p$  было разным, меняясь в пределах от  $1/4$  до 1 включительно. Из исторических данных вы знаете, что валовой внутренний продукт (ВВП) страны по паритету покупательной способности (стоимость произведенных страной товаров в мировой валюте) зависит от  $p$  по следующему правилу:

$$\text{ВВП}(p) = 1 + 2p - 2\sqrt{p} \text{ м.т.}$$

Эта формула верна для каждого  $p \in [1/4; 1]$ .

Обозначим максимально возможные объемы производства товаров в стране за  $X_{\max}$  и  $Y_{\max}$ . При каждом  $p$  объемы производства в стране Альфа выбираются так, чтобы стране стали доступны объемы потребления товаров, лежащие на кривой торговых возможностей (КТВ). Известно, что альтернативные издержки производства каждого из товаров положительны и строго возрастают, и что для любого объема  $X_0 \in [0; X_{\max}]$  существует такая мировая цена  $p \in [1/4; 1]$ , при которой в стране производится ровно  $X_0$  единиц товара  $X$ .

а) (4 балла) Найдите  $X_{\max}$  и  $Y_{\max}$ .

б) (1 балл) Для каждого  $p \in [1/4; 1]$  запишите уравнение КТВ страны ( $Y$  как функцию от  $X$ ).

в) (7 баллов) Восстановите уравнение КПВ страны ( $Y$  как функцию от  $X$ ). Подсказка: это можно сделать без использования производной.

**Решение**

а) Из строго возрастающих альтернативных издержек следует, что страна будет выбирать объемы производства в точке касания КПВ и КТВ, или в точке пересечения КПВ и КТВ, если это одна из двух крайних точек КПВ.

Пусть  $X^*(p)$  и  $Y^*(p)$  — объемы производства товаров  $X$  и  $Y$  в стране как функции от  $p$ . Из геометрических соображений о касании следует, что  $X^*(p)$  возрастает (хотя бы нестрого). Предположим, что  $X^*(1) < X_{\max}$ . Тогда, в силу возрастания  $X^*(p)$ ,  $X^*(p) \leq X^*(1) < X_{\max}$  для всех  $p \in [1/4; 1]$ , а значит, для значений  $X_0 \in (X^*(1); X_{\max})$  не существует цены  $p \in [1/4; 1]$  такой, что  $X^*(p) = X_0$ . По условию же такая цена существует. Значит, предположенное нами неравенство  $X^*(1) < X_{\max}$  неверно, и следовательно,  $X^*(1) = X_{\max}$  и  $Y^*(1) = 0$ .<sup>3</sup>

Аналогично,  $X^*(1/4) = 0$  и значит,  $Y^*(1/4) = Y_{\max}$ .

Теперь можно найти  $X_{\max}$  и  $Y_{\max}$  из данных о ВВП при ценах 1 и  $1/4$  соответственно.

$$X_{\max} + 0 = 1 \cdot X^*(1) + Y^*(1) = \text{ВВП}(1) = 1.$$

<sup>3</sup>Тот факт, что при  $X = X_{\max}$   $Y = 0$  следует из условия о том, что альт. издержки производства каждого из товаров положительны, а значит, у множества производственных возможностей нет вертикальных и горизонтальных границ.

$$0 + Y_{\max} = (1/4) \cdot X^*(1/4) + Y^*(1/4) = \text{ВВП}(1/4) = 1/2.$$

Ответ:  $X_{\max} = 1, Y_{\max} = 1/2$ .

б) Уравнением КТВ является прямая  $pX + Y = \text{ВВП}(p)$  (при движении вдоль КТВ стоимость произведенных товаров в международных ценах не меняется). Отсюда,

$$Y = \text{ВВП}(p) - pX = 1 + 2p - 2\sqrt{p} - pX = 1 - 2\sqrt{p} + p(2 - X).$$

Ответ:  $Y(X) = 1 - 2\sqrt{p} + p(2 - X)$ .

в) Мы знаем, что крайние точки КПВ —  $(1,0)$  и  $(0,1/2)$ . Теперь нам нужно найти все остальные точки на КПВ.

**Способ 1** (без использования производной).

Докажем, что чтобы найти уравнение КПВ, нам нужно всего лишь *проминимизировать* найденное выше уравнение КТВ по  $p$ . Это следует из того, что КПВ является *нижней огибающей* семейства КТВ.

А именно, пусть искомое уравнение есть  $Y = \text{КПВ}(X)$ . Поскольку для любого  $p$  КПВ лежит не выше КТВ, получаем, что для любого  $X \in [0; X_{\max}]$  и любого  $p \in [1/4; 1]$  верно неравенство

$$\text{КПВ}(X) \leq 1 - 2\sqrt{p} + p(2 - X) \quad (8.1)$$

Но возьмем некий фиксированный объем  $X$  и рассмотрим цену  $p_0(X) \in [1/4; 1]$ , при которой в стране производится именно этот объем  $X$  (такая цена есть по условию). Поскольку при этой цене производится именно объем  $X$ , при объеме  $X$  и цене  $p_0(X)$  значения КПВ и КТВ совпадают, то есть в (8.1) достигается равенство.

Итак, мы получили, что для всех  $p \in [1/4; 1]$  верно неравенство (8.1), причем при каком-то  $p \in [1/4; 1]$  оно выполняется как равенство (этот факт проиллюстрирован на рис. 8.1). А это значит, что при каждом  $X$  КПВ( $X$ ) равно *минимальному* значению функции  $f(p) = 1 - 2\sqrt{p} + p(2 - X)$  на отрезке  $[1/4; 1]$ .

Осталось найти это минимальное значение.  $f(p)$  является квадратичной функцией от  $t = \sqrt{p}$ , Поскольку  $X \leq X_{\max} = 1 < 2$ , ветви параболы направлены вверх (здесь мы существенно использовали найденное раньше значение  $X_{\max} = 1$ ). Поскольку  $p \in [1/4; 1], t \in [1/2; 1]$ . Вершина имеет абсциссу

$$t_{\text{в}} = \frac{1}{2 - X},$$

что принадлежит отрезку  $[1/2; 1]$  при  $0 \leq X \leq 1$ , значит, это действительно точка минимума. Отсюда

$$p_0(X) = \frac{1}{(2 - X)^2}$$

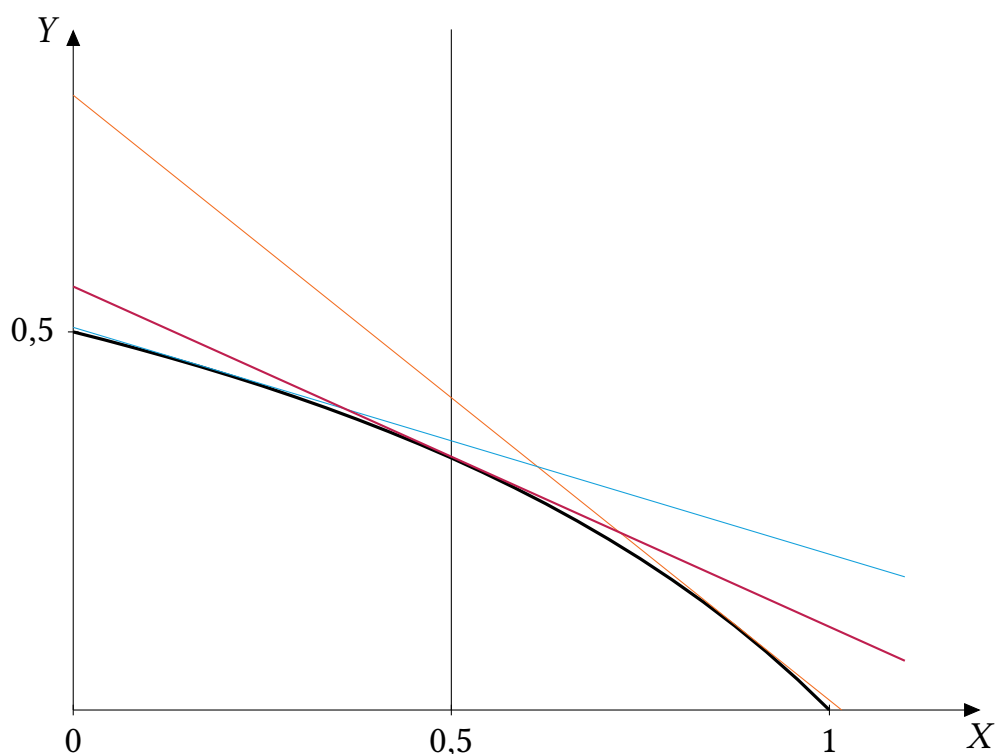
и

$$\text{КПВ}(X) = 1 - 2\frac{1}{2 - X} + \frac{1}{(2 - X)^2}(2 - X) = \frac{2 - X - 2 + 1}{2 - X} = \frac{1 - X}{2 - X}.$$

**Способ 2** (через анализ производных).

Пусть  $X(p)$  и  $Y(p)$  — объемы производства товаров в стране. Для каждого  $p$  выполнено тождество

$$Y(p) + pX(p) = \text{ВВП}(p) = 1 + 2p - 2\sqrt{p}.$$



**Рис. 8.1:** Идея решения: значение КПВ равно минимальному из значений всех КТВ на вертикальной прямой (при фиксированном  $X$ ). На рисунке изображены три КТВ, включая ту, значение которой при данном  $X$  минимально среди всех КТВ (изображена красным).

Продифференцируем его по  $p$ , получим

$$Y'(p) + 1 \cdot X(p) + X'(p)p = 2 - \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad (8.2)$$

Теперь заметим, что поскольку страна всегда находится в точке на КПВ,  $Y(p)$  и  $X(p)$  связаны тождеством

$$Y(p) = \text{КПВ}(X(p)).$$

Продифференцируем и его:

$$Y'(p) = \text{КПВ}'(X(p))X'(p).$$

Но поскольку экономика находится в точке касания КПВ и КТВ, а наклон КТВ равен  $-p$ , для любого  $p$  выполнено

$$\text{КПВ}'(X(p)) = -p.$$

Подставляя это соотношение в предыдущее равенство, получаем, что

$$Y'(p) = -pX'(p).$$

Подставляя это в (8.2), получаем, что  $X'(p)p$  сокращается, и в итоге,

$$X(p) = 2 - \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Выражая отсюда  $p$ , получаем что, цена  $p_0(X)$ , при которой оптимально производить ровно  $X$  единиц товара  $X$  задается как

$$p_0(X) = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

Поскольку при такой цене КПВ и КТВ в точке  $X$  совпадают, найти КПВ можно, подставив эту цену в уравнение КТВ.

**Ответ:**  $Y(X) = \frac{1-X}{2-X}$ .

**Примечание 1:** Как видим из этого уравнения КПВ,  $X_{\max} = 1$  и  $Y_{\max} = 1/2$ , все сошлось. При данной КПВ, являющейся участком гиперболы, альтернативные издержки производства действительно строго возрастают, см. рис. 8.1. Решив прямую задачу, можно проверить, что при данной КПВ ВВП описывается как раз функцией, данной в условии.

**Примечание 2:** приведенный метод восстановления КПВ по данным о ВВП работает при любом числе товаров. Предположим, что в открытой экономике есть 1000 товаров, а именно, товары  $Y, X_1, X_2, \dots, X_{999}$ . Пусть  $p_i$  — цена товара  $X_i$ , а цена товара  $Y$  принята за единицу. Допустим, мы смогли оценить зависимость ВВП от 999 цен  $p_1, p_2, \dots, p_{999}$ , и получили функцию ВВП( $p_1, p_2, \dots, p_{999}$ ). Тогда мы можем точно так же сначала восстановить КТВ как

$$\text{КТВ} = \text{ВВП}(p_1, p_2, \dots, p_{999}) - p_1 X_1 - p_2 X_2 - \dots - p_{999} X_{999},$$

а затем найти 1000-мерную КПВ  $Y(X_1, X_2, \dots, X_{999})$ , проминимизировав это выражение для КТВ по всем ценам  $p_1, p_2, \dots, p_{999}$ . Обоснование этого метода ровно то же, что и в случае двух товаров.

### Схема проверки

а) Всего за пункт 4 балла, из них:

- Правильные ответы для  $X_{\max}$  и  $Y_{\max}$  — по 1 баллу.
- Обоснование — 2 балла. Ссылка на то, что  $X(p)$  возрастает, необходима для обоснования.

б) 1 балл за верное уравнение КТВ.

в) Всего за пункт 7 баллов. При решении Способом 1 из них:

- Идея о том, что для получения КПВ нужно проминимизировать КТВ по  $p$  при каждом  $x$  (с обоснованием) — 5 баллов. При этом:
  - если есть эта идея без обоснования — 3 балла.
  - если есть только идея о том, что КПВ является нижней огибающей всех КТВ (без дальнейшей минимизации) — 3 балла.
- Получение зависимости  $X(p)$  или  $p(X)$  — 1 балл.
- Получение итоговой КПВ — 1 балл.

Решение способом 2 оценивалось полным баллом.

За арифметическую ошибку снимался 1 балл.

Особые случаи:

- Если участник просто продифференцировал зависимость  $КТВ(X, p)$  по  $p$  без идеи о том, что надо искать минимум (или с неверной идеей о том, что надо искать максимум), и находит в результате верное уравнение КПВ, ему ставится 2 балла из 7 за пункт в).
- Если участник просто «угадал» верное уравнение КПВ, и обосновал, что оно удовлетворяет всем условиям задачи, за пункт в) ставится полный балл.